К 250-летию
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Т. А. Леонтьева,
В. С. Панферов,
В. С. Серов

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО С РЕШЕНИЯМИ

Второе издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано учебно-методическим советом
по прикладной математике и информатике для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по специальности
010200 «Прикладная математика и информатика»
и по направлению
510200«Прикладная математики и информатика»*

Москва «Мир»
2005

УДК 517.5
ББК 22.16
Л 47

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор *Л. А. Муравей* (МАТИ – РГТУ им. К. Э. Циолковского), кандидат физико-математических наук *В. И. Буслаев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН).

Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.

Л 47 Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. *Второе издание, исправленное и дополненное.*– М.: Мир, 2005. –360 с., ил.

ISBN 5-03-003692-X

Книга написана на основе опыта авторов, в течение многих лет читавших курсы лекций по теории функций комплексного переменного и проводивших практические занятия по этому курсу на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова.

В книге отражены практически все темы, обычно входящие в классический курс по теории функций комплексного переменного, читаемый на факультетах математического и физического профилей в университетах. Каждой из этих тем посвящена отдельная глава, в которой кратко излагается необходимый теоретический материал и предлагается большой набор задач различной степени трудности для самостоятельного решения. В приложениях даны ответы для ряда задач и решения типичных задач каждой главы. В книге имеется предметный указатель.

Книга ориентирована на студентов и преподавателей естественных факультетов университетов, однако разнообразие предлагаемых задач позволяет использовать данное пособие и в вузах инженерного профиля.

УДК 517.5
ББК 22.16

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-003692-X

Предисловие к первому изданию

Данное учебное пособие написано на основе опыта авторов, ряд лет читающих курс теории функций комплексного переменного (ТФКП) и ведущих упражнения по этому курсу на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В сборнике задач представлены задачи по всем основным разделам курса ТФКП, читаемого на математических факультетах университетов. Наряду с традиционными включены темы, которые ранее можно было найти только в монографиях и некоторых научных статьях, а именно: пространства Харди H^p, ряды Дирихле, некоторые методы получения асимптотических оценок, преобразования Мелина, Гильберта, элементы теории приближений.

Данное учебное пособие состоит из 17 глав. Задачам каждой главы предшествует сводка основных определений, теорем и методов, используемых в этом разделе. Задачи в главах расположены зачастую в порядке возрастания трудности. Достаточно большой перечень простых задач в каждой главе, как представляется авторам, позволяет использовать сборник задач для курсов ТФКП и им родственных, читаемых в высших учебных заведениях нашей страны студентам математического, физического, инженерно-физического профилей.

Список литературы будет полезен для самостоятельной работы и углубленного изучения курса ТФКП.

Авторы благодарны заведующему кафедрой общей математики факультета ВМиК академику РАН В. А. Ильину, предложившему составление этого учебного пособия. Мы благодарны всем коллегам, сделавшим много полезных предложений. При подготовке рукописи к печати большую помощь оказали О. В. Добрышина и В. В. Шестопалова, за что авторы приносят им свою искреннюю благодарность.

Авторы

Предисловие ко второму изданию

Настоящее пособие является переработкой и дополнением сборника [14]. В данной книге добавлены новые задачи (для нумерации которых используется дополнительная позиция, например, 14.48.1 после 14.48), представлены решения типичных задач каждой главы и исправлены обнаруженные погрешности.

Пособие написано на основе опыта авторов, читавших курсы лекций по теории функций комплексного переменного (ТФКП), и опыта ведения семинарских занятий по этому курсу на факультете ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова. Этот сборник задач можно использовать как методическую поддержку учебного пособия Т. А. Леонтьевой [13], а также для ведения практических занятий, сопровождающих лекции, читаемые по классическим учебникам по ТФКП. Пособие содержит задачи по основным разделам курса ТФКП, читаемого на естественных факультетах университетов.

Наряду с традиционными разделами, в данное пособие включены темы, которые раньше можно было найти только лишь в монографиях и научных статьях, например, пространства Харди, преобразования Гильберта и Мелина, ряды Дирихле, методы получения асимптотических оценок, свойства гармонических функций, элементы теории приближений.

Пособие, как и первое издание, состоит из 17 глав, дополнения, относящегося к приложениям ТФКП в механике и физике, и списка рекомендуемой литературы. Формулировкам задач каждой главы предшествует теоретический материал, который представляет сводку основных определений, а также теорем и методов, используемых в этой главе. Задачи в главах расположены, как правило, по возрастанию их сложности, причем в ряде задач предполагается доказательство некоторого утверждения. При этом имеется большой набор и достаточно простых задач, что, по мнению авторов, позволяет использовать данное пособие и в вузах инженерного профиля. В одном из приложений даны ответы на некоторые задачи каждой из глав, а в другом – приведены решения типичных задач каждой главы. Для удобства читателя сборник снабжен предметным указателем.

Авторы благодарят всех коллег, сделавших в процессе подготовки настоящего издания ряд полезных замечаний и предложений, способствовавших улучшению его содержания. Особо авторы благодарны Н. П. Трифонову за подготовку рукописи к изданию.

Авторы

Глава 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. Первая компонента x этой пары называется *действительной частью*, вторая компонента y – *мнимой частью*, и для них приняты обозначения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Числа $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$ и $(0, 1) = i$ называются *нулем*, *единицей* и *мнимой единицей* соответственно.

Комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. *Суммой* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а их *произведением* – число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. *Вычитание* и *деление* комплексных чисел вводятся как действия, обратные сложению и умножению соответственно. Множество комплексных чисел образует *поле* относительно введенных операций умножения и сложения.

Комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляется с *действительным числом* x, а комплексное число $z = (0, y)$ называется *чисто мнимым* и представимо в виде $(0, y) = iy$. Таким образом, для комплексного числа $z = (x, y)$ справедливо равенство $z = x + iy$. Будем интерпретировать комплексное число $z = x + iy$ как точку (x, y) на координатной плоскости. Множество комплексных чисел обозначим через $\mathbf{C}$ (комплексная плоскость).

Комплексно-сопряженным числу $z = x + iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$. Справедливы соотношения

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ \ (z_2 \neq 0).$$

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Справедливы следующие равенства:

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}},\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0).$$

Угол φ, составленный радиусом-вектором точки z $(z \neq 0)$ с по ложительным направлением оси Ox, называется *аргументом* числа z. Аргумент определен с точностью до слагаемого $2\pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, т. е. $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Значение аргумента, принадлежащее полуинтервалу $(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$, где φ_0 – некоторое фиксированное значение, называется *главным* и обозначается $\arg z$. Обычно $\varphi_0 = 0$ либо $\varphi_0 = -\pi$. В дальнейшем под главным значением аргумента будем считать значение аргумента из полуинтервала $(-\pi, \pi]$.

Если $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то возможно представление комплексного числа z в виде

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Для $z = 0$ аргумент не определен, но модуль равен 0.

Справедливы следующие соотношения:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|,\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$z_1/z_2 = |z_1|\,/\,|z_2|\ (z_2 \neq 0),\ (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\ \ (\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2).$$

Используя *формулу Эйлера* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получаем представление комплексного числа в виде

$$z = |\,z\,|\,e^{i\varphi};\ \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Справедливы равенства:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \ z_1/z_2 = (|z_1|\,/\,|z_2|)\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z_2 \neq 0,$$

$$z^n = |z|^n\,e^{in\varphi}.$$

Корнем натуральной степени n из комплексного числа z называется такое число, которое, будучи возведенным в степень n, дает z. Если $z \neq 0$, имеем ровно n различных значений корня

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = |z|^{1/n}\,e^{i(\varphi+2\pi k)/n},\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\varphi = \arg z$, $|z|$ – модуль числа z, а $|\,z\,|^{1/n}$ – арифметический корень.

Многочленом степени n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, над полем комплексных чисел называется функция вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – комплексные числа – коэффициенты многочлена $P_n(z)$, причем $a_n \neq 0$. Если все коэффициенты суть нули, то многочлен называют *нулевым многочленом* и его степень не определена.

Основная теорема алгебры гласит, что любой многочлен степени $n \geq 1$ над полем комплексных чисел имеет ровно n нулей с учетом их кратности. Справедливо следующее разложение многочлена $P_n(z)$ (каноническое его разложение над полем $\mathbf{C}$):

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{\alpha_k},$$

где z_k – корень многочлена $P_n(z)$ кратности $\alpha_k = 1, 2, \ldots$, $z_k \neq z_l$ $(k \neq l)$, и

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = n.$$

Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ сферу S с центром в точке (0, 0, ½) радиуса ½ и проведем из точки $P(0, 0, 1)$ луч, пересекающий сферу S в отличной от P точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ и комплексную плоскость $\zeta = 0$ в точке $z = x + iy$. Точка $M \in S$ называется *стереографической проекцией* точки z на S. При этом справедливы формулы, задающие отображение $\mathbf{C} \to S \setminus P$:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \varsigma = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

и обратное отображение $S \setminus P \to \mathbf{C}$:

$$x = \frac{\xi}{1-\varsigma}, \quad y = \frac{\eta}{1-\varsigma} \quad (\varsigma \neq 1),$$

называемые *формулами стереографической проекции*.

Если дополнить взаимно-однозначное соответствие, которое существует между комплексной плоскостью $\mathbf{C}$ и сферой S без точки $P(0, 0, 1)$, поставив в соответствие точке P *идеальное комплексное число* $z = \infty$, то получим интерпретацию расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Следовательно, каждую точку сферы S можно считать изображением соответствующей точки плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Такая интерпретация комплексных чисел называется *интерпретацией Римана*, а S – *сферой Римана*. Положим по определению

$$\frac{1}{\infty} = 0, \ \frac{1}{0} = \infty, \ z \cdot \infty = \infty \ \ (z \neq 0), \quad z + \infty = \infty, \ z / \infty = 0 \quad (z \neq \infty).$$

Так же, как и для комплексного числа z = 0, arg z комплексного числа z = ∞ не определен, но модуль равен +∞.

1.1. Доказать формулу деления двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_2|^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{|z_2|^2},\quad z_2 \neq 0.$$

1.2. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; 2) i^n; 3) $(1+i)^n + (1-i)^n$;

4) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$; 5) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$; 6) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$;

7) $(x+iy)^n$; 8) $\left(\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$; 9) $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$;

10) $(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,\ n \in \mathbf{N}$.

1.3. Доказать справедливость формул:

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos k\varphi = 2^n\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^n \cos\dfrac{n\varphi}{2},\ -\pi < \varphi \leq \pi$;

2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin k\varphi = 2^n\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^n \sin\dfrac{n\varphi}{2},\ -\pi < \varphi \leq \pi$;

3) $\sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}(-1)^m = 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$;

4) $\sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}(-1)^m\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^{2m}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^{n-2m} = \cos\dfrac{n\varphi}{2}$;

5) $\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2m+1}(-1)^m\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^{2m+1}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^{n-2m-1} = \sin\dfrac{n\varphi}{2}$;

6) $\sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}(-1)^m\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^{2m}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^{n-2m} = (-1)^n\cos\dfrac{n\varphi}{2}$;

7) $\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2m+1}(-1)^m \left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^{2m+1}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^{n-2m-1} = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{n\varphi}{2}$;

8) $\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\varphi)^{n-k}(\sin\varphi)^k(-1)^{k/2}$;

9) $\sin n\varphi = \sum_{\substack{k=0\\ k-\text{нечетн.}}}^{n} C_n^k (\cos\varphi)^{n-k}(\sin\varphi)^k(-1)^{(k-1)/2}$.

1.4. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

1) $\dfrac{2}{1-3i}$; 2) $(1+i\sqrt{3})^3$; 3) $\left(\dfrac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$;

4) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$; 5) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$; 6) $-\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$;

7) $\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}$; 8) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad 0\le\alpha\le 2\pi$;

9) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}, 0\le\alpha\le 2\pi,\ \alpha\ne\pi$; 10) $z^2+z,\ |z|=1$.

1.5. Решить уравнения относительно $z\in\mathbf{C}$:

1) $z^2=i$; 2) $z|z|+2z+i=0$; 3) $z^2+z|z|+|z|^2=0$;

4) $|z| = z+2i+1$; 5) $\overline{z}=z^{n-1}, n\in\mathbf{N}$; 6) $z=\overline{z}^n, n\in\mathbf{Z}_+$.

1.6. Доказать, что произвольное комплексное число z, удовлетворяющее условиям $|z|=1$ и $z\ne -1$, может быть единственным образом представлено в виде $z=\dfrac{1+i\xi}{1-i\xi}$, где ξ – действительное число, $\xi=\mathrm{tg}(\varphi/2)$, $\varphi\in\mathrm{Arg}\,z$.

1.7. Доказать, что если $z+z^{-1}=2\cos\alpha$, то для любого $n\in\mathbf{N}$

$$z^n+z^{-n}=2\cos n\alpha.$$

1.8. Доказать следующие равенства и дать их геометрическую интерпретацию:

1) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\arg z_1-\arg z_2)$;

2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$;

3) $|1-z_1\cdot\overline{z}_2|^2=|z_1-z_2|^2+(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

1.9. Доказать неравенства и дать их геометрическую интерпретацию (описать необходимые и достаточные условия равенства):

1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; 2) $|z_1 - z_2| \ge \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$;

3) $|1 - z_1 \cdot \overline{z}_2|^2 \ge (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$;

4) $\max(|\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2|, |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2|) \le |z_1 - z_2|$
$\le |\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2| + |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2|$;

5) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$;

6) $|z_0 + z_1 + \ldots + z_n| \ge |z_0| - (|z_1| + \ldots + |z_n|)$;

7) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z| \quad (z \ne 0)$;

8) $|z - a| \le \big|\,|z| - |a|\,\big| + |z|\,|\arg(z/a)| \quad (a \ne 0)$;

9) $|e^z - 1| \le e^{|z|}|z|$; 10) $0 < |z| < 1, \dfrac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \dfrac{7}{4}|z|$.

1.10. Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2 - 1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках (–1, 0), (1, 0) и z, проведенной из вершины z.

1.11. Вычислить (свернуть) следующие суммы:

1) $\cos x + r\cos(x + \alpha) + \ldots + r^n \cos(x + n\alpha)$;

2) $\sin x + r\sin(x + \alpha) + \ldots + r^n \sin(x + n\alpha)$;

3) $\cos x + r\cos(x + \alpha) + r^2\cos(x + 2\alpha) + \ \ , \quad r < 1$;

4) $\sin x + r\sin(x + \alpha) + r^2\sin(x + 2\alpha) + \ldots, \quad r < 1$;

5) $\sum_{i=1}^{n} \cos i\alpha$;

6) $\sum_{i=1}^{n} \sin i\alpha$.

1.12. Доказать, что на множестве комплексных чисел $\mathbf{C}\backslash\overline{\mathbf{R}}_-$ значение arg z может быть вычислено по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0,\ y > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

1.13. Найти геометрическое место точек (ГМТ) $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющих условиям:

1) $r_2 < |z - z_0| < r_1, \ 0 \le r_2 < r_1$; 2) $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$;

3) $\operatorname{Re} z^{-1} = c, \ c$ – const; 4) $\operatorname{Im} z^{-1} = c, \ c$ – const;

5) $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha, -\pi<\alpha\le\pi$;

6) $|z-z_1|+|z-z_2|=a,\ a>|z_1-z_2|$;
7) $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=a,\quad a<|z_1-z_2|$;
8) $|z|>2+\operatorname{Re} z$; 9) $2|z|>|1+z^2|$; 10) $|z^2+az+b|<R^2$.

1.14. Найти ГМТ $z\in\mathbf{C}$, удовлетворяющих условию:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k,\quad k>0.$$

1.15. Выполнить приведенные ниже задания.

а) Найти ГМТ $z\in\mathbf{C}$, удовлетворяющих при $|a|<1$ условиям:

$$1)\ \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1;\quad 2)\ \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1;\quad 3)\ \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|>1.$$

б) Пусть $|z|<1$. Рассмотрим многоугольник со сторонами $1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\ldots+z^n$. Лежит ли точка $z_0=0$ внутри этого многоугольника?

1.16. Выполнить следующие задания.

1) Доказать, что ГМТ $z\in\mathbf{C}$, удовлетворяющих уравнению

$$a|z|^2+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0,$$

где $a>0$, $c\in\mathbf{R}$ и $ac<|b|^2$, является окружностью. Найти ее центр и радиус.

2) Доказать, что ГМТ $z\in\mathbf{C}$, удовлетворяющих уравнению

$$\overline{A}z+A\overline{z}+B=0,$$

где $B\in\mathbf{R}$, $\overline{A}\ne 0$ – прямая. Это уравнение называют *автосопряженным уравнением* прямой.

3) Написать уравнение прямой, проходящей через точки z_1 и z_2 $\in\mathbf{C}$ $(z_1\ne z_2)$.

4) Написать уравнение прямой, проходящей через точку z и перпендикулярную прямой

$$l:\overline{A}z+A\overline{z}+B=0\ (A\ne 0, B\in\mathbf{R}).$$

5) Найти площадь треугольника с вершинами в заданных точках $z_1, z_2, z_3\in\mathbf{C}$.

6) Найти центр и радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами в точках $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

1.17. Доказать формулы стереографической проекции.

1.18. Доказать, что стереографические проекции точек z_1 и z_2 диаметрально противоположны тогда и только тогда, когда

$$z_1 \bar{\bar{z}}_2 = 1.$$

1.19. При каком преобразовании сферы образ точки z переходит в образ точки z^{-1}?

1.20. Что соответствует на сфере семейству параллельных прямых на плоскости?

1.21. Доказать, что окружности на сфере Римана соответствует окружность или прямая на комплексной плоскости, причем прямая получается тогда и только тогда, когда окружность на сфере Римана проходит через точку $P(0, 0, 1)$ на сфере S.

1.22. Доказать, что при стереографической проекции углы между кривыми на сфере Римана равны углам между их образами на комплексной плоскости.

1.23. Пусть $d(z_1, z_2)$ – расстояние между стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 расширенной комплексной плоскости. Доказать, что справедливы формулы:

1) $d(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad (z_1, z_2 \neq \infty);$

2) $d(z_1, \infty) = (1+|z_1|^2)^{-1/2}.$

1.24. Найти ГМТ $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющих условию:

1) $d(z,0) < R, 0 < R < 1;$ 2) $d(z,\infty) < R, 0 < R < 1;$

3) $d(z,i) > 1/\sqrt{2};$ 4) $1/2 < d(z,1) < 1/\sqrt{2}.$

1.25. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{i};$ 2) $\sqrt[4]{-1};$ 3) $\sqrt{1-i};$ 4) $\sqrt[5]{-4+3i};$

5) $\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}};$ 6) $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}};$

7) $\sqrt{1+e^{i\varphi}}, -\pi < \varphi \le \pi;$ 8) $\sqrt{i+e^{i\varphi}}, -\pi < \varphi \le \pi;$

9) $\sqrt{z^2-1}, z = 1+i;$ 10) $\sqrt[8]{1+i};$ 11) $\sqrt[7]{-1}.$

1.26. Пусть $a = \alpha + i\beta$. Доказать, что все решения уравнения $z^2 = a$ даются формулами:

1) $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|a|+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{|a|-\alpha}{2}}\right), \beta > 0;$

2) $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|a|+\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{|a|-\alpha}{2}}\right), \beta < 0.$

1.27. Доказать, что для любого $z \in \mathbf{C}$ справедлива формула

$$|\sqrt{z^2-1}+z|+|\sqrt{z^2-1}-z| = |z-1|+|z+1|.$$

1.28. Пусть $\omega = e^{i2\pi/n}$ и натуральное k не кратно $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(n-1)k} = 0.$$

1.29. Пусть ω – любой корень натуральной степени n из единицы, отличный от единицы. Доказать, что справедливы формулы:

1) $1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + n\omega^{n-1} = n/(\omega - 1);$

2) $1 + 4\omega + 9\omega^2 + \ldots + n^2\omega^{n-1} = \frac{n(1-\omega)+2n}{(1-\omega)^2}.$

1.30. Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + \ldots + a_{n-1}z + a_n$, $a_0 \neq 0$, – многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами. Доказать, что если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – различные корни многочлена $P_n(z)$ кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ соответственно, то справедливо разложение

$$P_n(z) = a_0 \prod\nolimits_{k=1}^m (z - z_k)^{\alpha_k}, \ \sum\nolimits_{k=1}^m \alpha_k = n.$$

1.31. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корни многочлена

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

выписанные с учетом кратности. Доказать формулы Виета

$$a_1 = -\sum\nolimits_{k=1}^n z_k;$$

$$a_2 = (-1)^2 \sum\nolimits_{1\le k_1<k_2\le n} z_{k_1} \cdot z_{k_2};$$

$$\ldots$$

$$a_l = (-1)^l \sum\nolimits_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_l\le n} z_{k_1} \cdot z_{k_2} \cdot \ldots \cdot z_{k_l}$$

$$\ldots$$

$$a_n = (-1)^n z_1 \cdot z_2 \ldots z_n.$$

1.32. Доказать, что если $z_0 \in \mathbf{C}$ – корень кратности α_0 алгебраического многочлена степени больше 1 с действительными коэффициентами, то $\overline{z}_0$ – также корень этого многочлена и его кратность равна α_0.

1.33. Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + ... + a_{n-1}z + a_n$, $a_0 \neq 0$, – многочлен степени n с действительными коэффициентами. Пусть, кроме того, $x_1, \ldots, x_r$ – действительные корни кратности $\beta_1, \ldots, \beta_r$ соответственно, а $z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \cdots, z_s, \overline{z}_s$ – комплексные корни кратности $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha_s$ соответственно. Доказать, что справедливо разложение

$$P_n(z) = a_0 \prod\nolimits_{k=1}^r (z - x_k)^{\beta_k} \prod\nolimits_{k=1}^s (z_k^2 - 2\operatorname{Re} z_k \cdot z + |z_k|^2)^{\alpha_k},$$

где

$$\sum\nolimits_{k=1}^r \beta_k + 2\sum\nolimits_{k=1}^s \alpha_k = n.$$

1.34. Пусть $x \in \mathbf{R}$ и $Q_n(x) = a_0/2 + \sum\nolimits_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригонометрический многочлен с действительными коэффициентами a_k, b_k. Доказать, что $Q_n(x)$ имеет не более $2n$ корней.

1.35. Доказать, что справедливы следующие равенства:

1) $\sin^{2n} x = \dfrac{1}{2^{2n}} \sum\nolimits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^{n-k} \cos 2(n-k)x;$

2) $\sum\nolimits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^{n-k} \sin 2(n-k)x = 0;$

3) $\cos^{2n} x = \dfrac{1}{2^{2n}} \sum\nolimits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x;$

4) $\sum\nolimits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \sin 2(n-k)x = 0;$

5) $\sin^{2n+1} x = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \sum\nolimits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{n-k} \sin(2(n-k)+1)x;$

6) $\sum\nolimits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{n-k} \cos(2(n-k)+1)x = 0;$

7) $\cos^{2n+1} x = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \sum\nolimits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \cos(2(n-k)+1)x;$

8) $\sum\nolimits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \sin(2(n-k)+1)x = 0.$

1.36. Доказать следующие утверждения.

а) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ есть алгебраический многочлен степени n. Этот многочлен называется *многочленом Чебышева* *первого рода*. Показать, что старший коэффициент у $T_n(x)$ равен 2^{n-1}.

б) Корни производной алгебраического многочлена принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена.

1.37. Пусть $P_n(z)$ – алгебраический многочлен степени n. Какими должны быть его коэффициенты, если:

$$1)\ \overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z});\quad 2)\ \overline{P_n(z)} = -P_n(\overline{z}).$$

1.38. Пусть a – действительное число. Доказать, что если многочлен $P_n(z)$ степени n имеет n действительных корней, то многочлен $Q_n(z) = P_n(z + ia) + P_n(z - ia)$ также имеет n действительных корней.

1.39. Доказать тождества:

$$1)\ (n-2)\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 + |\sum_{k=1}^{n} z_k|^2 = \sum_{1\le k<s\le n}|z_k + z_s|^2,\ n\ge 2;$$

$$2)\ n\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 - |\sum_{k=1}^{n} z_k|^2 = \sum_{1\le k<s\le n}|z_k - z_s|^2,\ n\ge 2.$$

1.40. Доказать неравенства:

$$1)\ |\sum_{k=1}^{n} z_k| \le \sqrt{n\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2};$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{n}|z_k| \le n^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p},\quad p\ge 1;$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n}|z_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p},\quad 0<p\le 1.$$

1.41. Пусть $p > 0$, а $q < 0$. Доказать, что справедливы следующие неравенства:

$$1)\ \sqrt[n]{|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n|} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p};$$

$$2)\ \sqrt[n]{|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n|} \ge \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^q\right)^{1/q}.$$

1.42. Доказать следующие равенства:

$$1)\ \lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p} = \sqrt[n]{|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n|};$$

$$2)\ \lim_{p\to +\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p} = \max_{1\le k\le n}|z_k|;$$

3) $\lim\limits_{p\to-\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p} = \min\limits_{1\le k\le n}|z_k|$.

1.43. Доказать приведенные ниже утверждения.

а) При $p>1,\ q>1,\ p^{-1}+q^{-1}=1$ для любых наборов комплексных чисел $a_1, \ldots, a_N$ и $b_1, \ldots, b_N$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{N}|b_k|^q\right)^{1/q},$$

а при $p=1$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|\right)\max_{1\le k\le N}|b_k|.$$

Эти неравенства называют *неравенствами Гёльдера*.

Установить необходимые и достаточные условия равенства в этих неравенствах.

б) При $p\ge 1$ для любых наборов комплексных чисел $a_1, \ldots, a_N$ и $b_1, \ldots, b_N$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|a_k+b_k|\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{N}|b_k|^p\right)^{1/p},$$

которое называют *неравенством Минковского*.

Установить необходимое и достаточное условие равенства в этом неравенстве.

Глава 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число $z \in \mathbf{C}$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon .$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ или $z_n \to z$, $n \to \infty$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon .$$

Критерий Коши. Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists A > 0: \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow |z_n| \leq A .$$

Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной*, т. е.

$$\forall A > 0: \exists n \in \mathbf{N} \Rightarrow |z_n| > A .$$

Сходящиеся последовательности являются ограниченными.

Последовательность $\{z_n\}$ сходится к точке $z = \infty$ (является бесконечно большой), если

$$\forall A > 0 \ \exists N(A): \forall n \geq N(A) \Rightarrow |z_n| > A .$$

Это обозначается как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ или $z_n \to \infty, n \to \infty$.

Последовательность $z_n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $|z_n| \to \infty$, $n \to \infty$.

Число $z \neq \infty$ называется *предельной точкой* последовательности $\{z_n\}$, если существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$, сходящаяся к z.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Другими словами, любая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

Точка z = ∞ является *предельной точкой* для последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ этой последовательности, такая, что $\lim\limits_{z_{n_k}\to\infty} = \infty$.

Для любой неограниченной последовательности комплексных чисел точка z = ∞ является предельной. Таким образом, любая последовательность комплексных чисел имеет по крайней мере одну предельную точку (конечную или бесконечную).

Если последовательности $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$ являются сходящимися и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty, \lim\limits_{n\to\infty} z'_n = b \neq \infty$, то последовательности

$$\{z_n \pm z'_n\},\ \{z_n \cdot z'_n\},\ \{cz_n\}, \{z_n / z'_n\}\ (\text{если } b \neq 0)$$

являются сходящимися и

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm z'_n) = a \pm b,\ \ \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot z'_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty} cz_n = ca,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z'_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, составленный из комплексных чисел, называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ сходится к конечному пределу S. Этот предел называется *суммой ряда* и обозначается $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ряд называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм не сходится к конечному пределу.

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$ сходятся, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n, c \in \mathbf{C},\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z'_n)$$

сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c\sum_{n=1}^{\infty} z_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} z'_n.$$

Критерий Коши сходимости ряда. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

т. е. $|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon$.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с необходимостью следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Из абсолютной сходимости ряда вытекает сходимость ряда. Если ряд сходится абсолютно, то произвольное изменение порядка членов ряда не влияет на сходимость ряда и на его сумму.

Последовательность $\{z_n\}$ называется *последовательностью с ограниченным изменением*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+1} - z_n|.$$

Признаки сходимости ряда

Признак Коши. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, то ряд абсолютно расходится.

Признак Даламбера. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |z_{n+1}/z_n| < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а если для любого n, начиная с некоторого, $|z_{n+1}/z_n| \geq q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно расходится.

Признак Дирихле. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$ достаточно, чтобы последовательность $\{\zeta_n\}$ имела ограниченное изменение, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$, и частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ были ограничены.

***Следствие* 1**. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$, где $\zeta_n \subset \mathbf{R}$, достаточно, чтобы последовательность $\{\zeta_n\}$ была монотонной, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$, а частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ были ограничены.

Признак Абеля. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$ достаточно, чтобы последовательность $\{\zeta_n\}$ имела ограниченное изменение, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился.

Следствие 2. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$, где $\zeta_n \subset \mathbf{R}$, достаточно, чтобы последовательность $\{\zeta_n\}$ была монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился.

Пусть $\{z_n\}$ – последовательность комплексных чисел, для которой $z_n \neq -1$, $n \in \mathbf{N}$. Назовем $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$ *частичным произведением*, а $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k) = (1+z_1)(1+z_2)$ – *бесконечным произведением*. Бесконечное произведение называется *сходящимся*, если существует предел $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, отличный от нуля. Обозначается это следующим образом: $p = \prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$. Если не существует конечного предела, отличного от нуля, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ является *расходящимся*.

Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится, то отсюда с необходимостью следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Если z_n, $n \in \mathbf{N}$, – действительные числа, $z_n \geq 0$, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$. Абсолютно сходящееся произведение является сходящимся.

Бесконечное произведение сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

2.1. Доказать, что если последовательности $\{z_n\}$ и $\{z_n'\}$ сходятся, то сходятся последовательности $\{z_n \pm z_n'\}$, $\{z_n \cdot z_n'\}$ и

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} z_n', \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z_n'.$$

Если, кроме того, предположить, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' \neq 0$, то сходится последовательность $\{z_n / z_n'\}$ и справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_n'} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n'}.$$

2.2. Доказать, что сходимость последовательности $\{z_n\}$ эквивалентна сходимости последовательностей $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$.

2.3. Пусть две последовательности $\{z_n\}$ и $\{z_n'\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n'$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}|z_n'| \text{ и } \lim_{n\to\infty}\arg z_n = \lim_{n\to\infty}\arg z_n',$$

где $\arg z \in (-\pi, \pi]$?

2.4. Доказать, что для существования $\lim\limits_{n\to\infty} z_n, z \notin \overline{\mathbf{R}}$ – необходимо и достаточно, чтобы существовали

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| \neq 0, \lim_{n\to\infty}\arg z_n \neq \pm\pi.$$

2.5. Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$?

2.6. Доказать, что из сходимости последовательности $\{z_n\}$ следует сходимость последовательности $\{|z_n|\}$.

2.7. Показать, что из сходимости $\{|z_n|\}$, вообще говоря, не следует сходимость $\{z_n\}$.

2.8. В каких случаях сходимость последовательности $\{z_n\}$ эквивалентна сходимости последовательности $\{|z_n|\}$?

2.9. Доказать, что сходящиеся последовательности ограничены.

2.10. Доказать, что из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2.11. Доказать, что из неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

2.12. Привести пример бесконечно большой последовательности $\{z_n\}$, для которой ни последовательность $\{\operatorname{Re} z_n\}$, ни последовательность $\{\operatorname{Im} z_n\}$ не является бесконечно большой.

2.13. Доказать, что если последовательность $\{z_n\}$ – бесконечно большая, а последовательность $\{z_n'\}$ ограничена, то последовательность $\{z_n \pm z_n'\}$ является бесконечно большой.

2.14. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{-1} = 0$.

2.15. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \text{ а } \lim_{n\to\infty} z_n' \neq 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty} z_n z_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_n'} = \infty.$$

2.16. Доказать, что последовательность с ограниченным изменением является сходящейся.

2.17. Привести пример сходящейся последовательности с неограниченным изменением.

2.18. Пусть последовательность $\{z_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty}(z_n - z_{n-1}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = a.$$

Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$?

2.19. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена и

$$z_n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \ |z| < 1.$$

Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

2.20. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(1 + z/n)^n = e^x(\cos y + i \sin y), \ z = x + iy.$$

2.21. Доказать, что последовательность $z_n = \dfrac{z_{n-1} + z_{n-2}}{2}$, где $n = 3, 4, \ldots$, а z_1, z_2 – заданные числа, сходится и найти ее предел.

2.22. Пусть комплексное число $z \neq 0$. Для каких z существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_n^{-1})$, $z_1 = z$?

2.23. Для каких комплексных z сходятся последовательности $\{z_n\}$:

1) $z_n = z^n$; 2) $z_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$; 3) $z_n = z^n \cdot n^k$, k – целое;

4) $z_n = \dfrac{z^n}{n!}$; 5) $z_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{z^k}{k^2}$.

2.24. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = a.$$

Показать, что в случае $a = \infty$ утверждение, вообще говоря, неверно.

2.25. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = +\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = a.$$

2.26. При каких действительных значениях φ существует $\lim\limits_{n\to\infty} e^{in\varphi}$?

2.27. Привести пример последовательности, для которой множество точек:

1) конечно; 2) счетно; 3) несчетно.

2.28. Привести пример последовательности, для которой множество предельных точек есть:

1) прямая; 2) окружность $\{|z| = R\}$; 3) замкнутый круг $\{|z| \le R\}$;

4) полуплоскость $\{\operatorname{Re} z \ge 0\}, \{\operatorname{Im} z \ge 0\}$;

5) вся комплексная плоскость.

2.29. Найти предельные точки множеств:

1) $\{z^n, n = 1, 2, \ldots\}, z$ фиксировано;

2) $\{|z| < 1\}$; 3) $\{\operatorname{Re} z^{-1} = \text{const}\}$; 4) $\{\operatorname{Im} z^{-1} = \text{const}\}$;

5) $\{\operatorname{Re} z^{-1} > 1\}$; 6) $\{\operatorname{Re} z^{-1} < 1\}$; 7) $\{\operatorname{Im} z^{-1} > 1\}$;

8) $\{\operatorname{Im} z^{-1} < 1\}$; 9) $\{\alpha < \arg z < \beta, -\pi < \alpha < \beta < \pi\}$.

2.30. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

2.31. Доказать, что из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

2.32. Доказать, что для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} z_n| \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} z_n|.$$

2.33. Доказать, что если ряд сходится абсолютно, то произвольное изменение порядка следования членов ряда не влияет на его сходимость и сумму.

2.34. Доказать, что если ряд сходится, но не абсолютно, то можно так изменить порядок следования членов ряда, что вновь полученный ряд будет расходящимся.

2.35. Верно ли утверждение: пусть ряд сходится, но не абсолютно; тогда для любого $a \in \overline{C}$ можно так переставить члены ряда, что он будет сходиться к a.

2.36. Доказать, что если ряд сходится, но не абсолютно, то можно без перестановки так сгруппировать члены ряда, что вновь полученный ряд будет сходиться абсолютно.

2.37. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n'$, где $z_n' = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} z_k$, $\{p_n\}$ – произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел с $p_1 = 1$, сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n'$ называется *рядом, полученным с помощью группировки членов исходного ряда* без изменения их следования.

2.38. Привести пример расходящегося ряда, для которого найдется некоторая группировка его членов, являющаяся сходящимся рядом.

2.39. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ будет сходящимся, если выполнены условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$;

2) некоторая группировка ряда (см. задачу 2.37) является сходящимся рядом и при этом $\sup\limits_n (p_{n+1} - p_n) < \infty$.

2.40. Доказать признак Коши.

2.41. Доказать признак Даламбера.

2.42. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | z_{n+1} / z_n | = q > 1$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ будет расходящимся?

2.43. Доказать *признак Раабе*: если $\lim\limits_{n\to\infty} n(| z_n / z_{n+1} | - 1) = p$, то при $p > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а при $p < 1$ не сходится абсолютно. При $p = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ может как абсолютно сходиться, так и абсолютно расходиться.

2.44. Доказать *признак Гаусса*: если

$$| z_n / z_{n+1} | = \lambda + \mu / n + \theta_n / n^{1+\varepsilon},\ \varepsilon > 0, | \theta_n | \le c,$$

то при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, при $\lambda < 1$ – не сходится абсолютно; при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ – сходится абсолютно, а при $\lambda = 1$ и $\mu < 1$ – не сходится абсолютно.

2.45. Доказать *тождество Абеля*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n,$$

где $1 \le m < n$, $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, $S_0 = 0$, $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ – последовательности комплексных чисел. В другой форме тождество Абеля имеет вид

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) c_k + b_q c_q,$$

где $c_k = a_{p+1} + \ldots + a_k$.

2.46. Выполнить приведенные ниже задания.

а) Пусть $\{\zeta_n\}$ – последовательность с ограниченным изменением, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$ также сходится.

б) Привести пример расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \zeta_n$, для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, где $\{\zeta_n\}$ – ограниченная последовательность.

в) Доказать, что для того чтобы с помощью последовательности $\{\zeta_n\}$ множителей каждый сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ преобразовывался в сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\zeta_n\}$ была последовательностью с ограниченным изменением.

2.47. Пусть частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ограничены, а последовательность $\{\zeta_n\}$ – с ограниченным изменением и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n = 0$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta_n$ сходится.

2.48. Доказать признак Абеля.

2.49. Доказать признак Дирихле.

2.50. Доказать, что для того чтобы каждый сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с помощью последовательности $\{\zeta_n\}$ преобразовывался в сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta_n$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n - \zeta_{n+1}|$ сходился, т. е. чтобы последовательность $\{\zeta_n\}$ была с ограниченным изменением.

2.51. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in\varphi}}{\mu_n}$ сходится, если $0<\varphi<2\pi$, а последовательность действительных чисел $\{\mu_n\}$ монотонно стремится к $+\infty$.

2.52. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и

$$\left|\arg z_n\right| \le \alpha < \pi/2 \text{ или } \left|\arg z_n - \pi/2\right| \le \alpha < \pi/2,$$

то ряд сходится абсолютно. Привести пример сходящегося, но не абсолютно, ряда, для которого $\left|\arg z_n\right| < \pi/2$.

2.53. Пусть $\operatorname{Re} z_n \ge 0$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходится абсолютно. Привести пример сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходится, но не абсолютно.

2.54. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z_n'^2$ сходятся абсолютно, то абсолютно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n z_n', \ \sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm z_n')^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n^{\alpha}}, \alpha > 1/2.$$

2.55. При каких положительных α и β ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} + i \frac{1}{n^{\beta}} \right)$$

сходится и абсолютно сходится?

2.56. Найти все действительные значения параметра α, при котором сходятся ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e^{in}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{n!} i^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^{\alpha}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{n^{\alpha}}$.

2.57. Построить такую комплексную последовательность $\{z_n\}$, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ сходятся, но не абсолютно.

2.58. Исследовать сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z+1)...(z+n)}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, α – действительное;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \frac{z^n}{1+z^n}$.

2.59. Найти область сходимости рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$.

2.60. Доказать, что из сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ с необходимостью следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2.61. Доказать, что если $\{z_n\}$ – действительная последовательность и $z_n \geq 0$, то произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

2.62. Доказать, что абсолютно сходящееся бесконечное произведение сходится.

2.63. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

2.64. Привести пример такой последовательности $\{z_n\}$, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ расходится, а бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}|1+z_n|$ сходится.

2.65. Пусть Re $z_n < -1$. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+z_n|$.

2.66. Доказать, что если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$, то сходится и бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$.

2.67. Пусть бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ сходится. Следует ли отсюда, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$?

2.68. Пусть сходятся бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Следует ли отсюда, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$?

2.69. Пусть сходятся бесконечные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n').$$

Исследовать на сходимость бесконечные произведения:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)(1+z_n')$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n+z_n')$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+z_n}{1+z_n'}\right)$.

2.70. Доказать равенства:

1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1/2$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$;

3) $\prod_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n^2-1}\right)=1/4$; 4) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$;

5) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$; 6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=1$;

7) $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$; 8) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

2.71. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^{-1}}}{1+n^{-1}}=e^{c}\text{ , где } c=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{-1}-\ln n\right).$$

Это число c называется *постоянной Эйлера*.

2.72. Доказать, что если $|z|<1$, то бесконечное произведение $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$ сходится абсолютно и $\frac{1}{1-z}=\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$.

2.73. Доказать сходимость следующих бесконечных произведений:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n), |z|<1$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right), z\neq\pm in$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n z}{n}\right), \operatorname{Im} z>0$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n+z}\right), \operatorname{Re} z>0$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}, z\neq 1,2,\ldots$; 6) $\prod_{n=3}^{\infty}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{n}i\right)$.

2.74. Какие из бесконечных произведений предыдущей задачи сходятся абсолютно?

2.75. Найти области сходимости бесконечных произведений:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+n^{\alpha}z^{n}),\ \alpha\in\mathbf{R}$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{n})$; 6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{2^n}\right)$; 7) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

2.76. Что можно сказать об области сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z)$, если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ сходится?

Глава 3
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Множество $Z \subset \mathbf{C}$ называется *ограниченным*, если

$$\exists M > 0 : \forall z \in Z \Rightarrow |z| < M.$$

Точка $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ называется *предельной точкой* множества Z, если найдется последовательность $\{z_n\}$ точек множества Z, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0,\ z_n \neq z_0,\ n = 1, 2, \ldots$$

Множество $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. Множество $\overline{\mathbf{C}}$ будем считать компактом по определению.

Множество $\{z : |z - z_0| < R\} = B_R(z_0)$, $z_0 \neq \infty$, называется *открытым кругом* с центром в точке z_0 и радиусом $R > 0$.

Окрестностью точки $z_0 \neq \infty$ назовем любой открытый круг $B_R(z_0)$. Окрестностью точки $z_0 = \infty$ назовем множество

$$\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\},\ R \geq 0.$$

Множество $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *открытым*, если любая точка $z_0 \in Z$ содержится в Z вместе с некоторой своей окрестностью.

Замыканием $\overline{Z}$ множества $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется множество, полученное из Z присоединением всех его предельных точек. Таким образом, множество Z замкнуто, если $Z = \overline{Z}$.

Функцией комплексного переменного $f(z)$, определенной на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, называется отображение множества Z в множество $W \subset \overline{\mathbf{C}}$, при котором каждому значению $z \subset Z$ ставится в соответствие одно или несколько значений из множества W. В зависимости от этого функцию называют *однозначной* или *мно-*

гозначной (в дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать только однозначные функции).

Множество $W_1 \subset W$ называется *образом* множества Z при отображении *f*, если для любого $\omega \in W_1$ существует $z \in Z$, такое, что $\omega = f(z)$.

Множество $Z_1 \subseteq Z$ называется *прообразом* множества $W_1 \subset W$, если для любого $z \subset Z_1$ существует $\omega \in W_1$ такое, что $f(z) = \omega$.

Пусть z_0 является предельной точкой множества $Z \subset \mathbf{C}$ – области определения функции $f(z)$. Число $A \neq \infty$ называется *предельным значением* функции $f(z)$ в точке z_0 *по Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in Z,\ 0 < |z - z_0| < \delta,$$

$$(\delta < |z| < \infty, \text{ если } z_0 = \infty) \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Обозначается это следующим образом: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Число *A* называется *предельным значением по Гейне* функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности $\{z_n\}$ точек множества Z, такой, что $z_n \neq z_0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к *A*, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$. Определения предельного значения по Коши и Гейне эквивалентны.

Критерий Коши существования конечного предельного значения. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке z_0 конечное предельное значение, необходимо и достаточно, чтобы:

1) при $z_0 \neq \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z_1, z_2 \in Z,\ 0 < |z_1 - z_0| < \delta,$$

$$0 < |z_2 - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon;$$

2) при $z_0 = \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z_1, z_2 \in Z,\ \delta < |z_1| < \infty,$$

$$\delta < |z_2| < \infty \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Функция $f(z)$ имеет в точке $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ предел, равный бесконечности, если

$$\forall R > 0 \, \exists \delta(R) > 0 : \forall z \in Z,\ 0 < |z - z_0| < \delta,$$

$$(\delta < |z| < \infty, \text{ если } z_0 = \infty) \Rightarrow |f(z)| > R.$$

Пусть множество $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ – область определения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, а z_0 – предельная точка множества Z. Тогда, если существуют конечные предельные значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точке z_0, то существуют конечные предельные значения функций $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ в точке z_0 и

$$\lim_{z \to z_0}(f_1(z) \pm f_2(z)) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \pm \lim_{z \to z_0} f_2(z),$$

$$\lim_{z \to z_0}(f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \to z_0} f_2(z).$$

Если, кроме того, предположить, что $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$, то существует конечное предельное значение функции $f_1(z) \cdot f_2^{-1}(z)$ и

$$\lim_{z \to z_0}(f_1(z) \cdot f_2^{-1}(z)) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot (\lim_{z \to z_0} f_2(z))^{-1}.$$

Пусть множество $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ есть область определения функции $f(z)$, а точка $z_0 \in Z$ является предельной для Z. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Непрерывность в точке $z_0 = \infty$ означает существование конечного предельного значения в точке $z_0 = \infty$.

Функция, непрерывная в каждой точке множества $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, называется *непрерывной на множестве* Z.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$. Для того, чтобы функция $f(z)$ была непрерывной в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ переменных x, y были непрерывны в точке (x_0, y_0).

Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны в точке z_0, то функции $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ и $f_1(z) \cdot f_2^{-1}(z)$ (если $f_2(z_0) \neq 0$) непрерывны в точке z_0.

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве Z и непрерывна в точке $z_0 \in Z$, а функция $g(\omega)$ определена на множестве значений функции $f(z)$ и непрерывна в точке $\omega_0 = f(z_0)$. Тогда сложная функция $g(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Функция $f(z)$, определенная на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, называется *ограниченной* на Z, если $\exists M > 0 : \forall z \in Z \Rightarrow |f(z)| < M$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Всякая непрерывная на компакте $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ функция является ограниченной на этом компакте, а ее модуль достигает на множестве Z точной верхней и нижней граней

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z_1, z_2 \in Z, |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема Кантора. Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на этом компакте.

Модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции $f(z)$, определенной на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, называется функция переменного $\delta > 0$ вида

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{|z_1 - z_2| < \delta \\ z_1, z_2 \in Z}} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Функция $f(z)$ равномерно непрерывна на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ тогда и только тогда, когда ее модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ на этом множестве стремится к 0 при $\delta \to +0$.

Элементарные функции комплексного переменного

1. Функция $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, – комплексные числа и $a_0 \neq 0$, называется *многочленом* степени n.

2. Функция $R(z) = \dfrac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, называется *рациональной функцией*.

3. Функция $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$, называется *показательной*.

4. *Тригонометрические функции*:

$$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i, \ \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2,$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

5. *Гиперболические функции*:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

3.1. Доказать эквивалентность определений предельного значения функции в точке по Коши и по Гейне.

3.2. Доказать критерий Коши существования конечного предельного значения функции в точке.

3.3. Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ и точка $z_0 \in Z$. Доказать, что если существует конечное предельное значение функции $f(z)$ в точке z_0, то найдется окрестность точки z_0, принадлежащая Z, на которой функция $f(z)$ ограничена.

3.4. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, то функция $|f(z)|$ также непрерывна на Z.

3.5. Пусть точка $z_0 = \infty$ является предельной для множества Z и функция $f(z)$ непрерывна на Z. Следует ли отсюда, что $f(z)$ ограничена на Z?

3.6. Пусть точка $z = \infty$ является предельной для множества Z, функция $f(z)$ непрерывна на Z и существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty,\, z\in Z} f(z)$. Следует ли отсюда, что $f(z)$ ограничена на Z?

3.7. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{\mathbf{C}}$, то она является ограниченной на $\overline{\mathbf{C}}$.

3.8. Пусть функция непрерывна на множестве $Z \subset \mathbf{C}$. Следует ли отсюда, что она ограничена на Z?

3.9. Доказать, что непрерывная на замкнутом множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ функция является ограниченной на Z.

3.10. Доказать, что непрерывная функция переводит замкнутое множество из $\overline{\mathbf{C}}$ в замкнутое множество.

3.11. Доказать, что при отображении, осуществляемом непрерывной функцией, образ компакта является компактом.

3.12. Доказать, что при отображении, осуществляемом непрерывной функцией, прообраз открытого множества является открытым, прообраз замкнутого множества замкнут.

3.13. Показать, что утверждение о том, что при непрерывном отображении образ открытого множества открыт, неверно.

3.14. Доказать теорему Кантора.

3.15. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{\mathbf{C}}$, то она равномерно непрерывна на $\overline{\mathbf{C}}$.

3.16. Пусть функция равномерно непрерывна на множестве $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$. Следует ли отсюда, что она ограничена на Z?

3.17. Пусть функция равномерно непрерывна на каждом из множеств Z_1 и Z_2. Следует ли отсюда, что она будет равномерно непрерывна на множестве $Z_1 \cup Z_2$?

3.18. Пусть функция равномерно непрерывна на каждом из компактов Z_1 и Z_2. Следует ли отсюда, что она будет равномерно непрерывна на множестве $Z_1 \cup Z_2$?

3.19. Верно ли утверждение о том, что непрерывная на замкнутом множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве?

3.20. Привести пример непрерывной и ограниченной на множестве Z функции, не являющейся равномерно непрерывной на этом множестве, если:

1) Z – ограниченное множество;

2) Z – неограниченное множество.

3.21. Пусть точка $z_0 = \infty$ является предельной для множества $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$, функция $f(z)$ непрерывна на Z и существует конечный предел $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$. Следует ли отсюда, что функция $f(z)$ равномерно непрерывна на Z?

3.22. Пусть точка $z_0 = \infty$ является предельной для множества $Z \subset \overline{\mathbf{C}}$ и функция $f(z)$ равномерно непрерывна на Z. Следует ли отсюда, что существует конечный предел $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$?

3.23. Пусть Z – ограниченное множество, а $\overline{Z}$ – его замыкание. Доказать, что для того чтобы функция $f(z)$, определенная и непрерывная на Z, могла быть продолжена на $\overline{Z}$ до непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была равномерно непрерывной на Z.

3.24. Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $Z \subset \mathbf{C}$ и $\omega(f, \delta)$ – ее модуль непрерывности. Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(z)$ на множестве Z необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f, \delta) = 0$.

3.25. Доказать, что функция e^z обладает следующими свойствами:

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; 2) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$;

3) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$; 4) $e^z \neq 0$, $z \in \mathbf{C}$;

5) если $e^z = e^{z+\omega}$, то $\omega = i\,2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$;

6) e^z непрерывна на $\mathbf{C}$; 7) не существует $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$;

8) e^z принимает действительные значения только в точках

$z = x + i\pi k$, $x \in \mathbf{R}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$.

9) e^z принимает чисто мнимые значения только в точках

$z = x + i(\pi/2 + \pi k)$, $x \in \mathbf{R}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$.

10) $\overline{e^z} = e^{\bar z}$.

3.26. Для функций $\sin z$ и $\cos z$ доказать следующие утверждения:

1) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$;

2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;

3) $\sin(z + k\pi) = (-1)^k \sin z$, $\cos(z + \pi k)$

$$= (-1)^k \cos z,\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots;$$

4) $\sin(z + \pi/2) = \cos z$, $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$;

5) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

6) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin((z_1 + z_2)/2) \cos((z_1 - z_2)/2)$,

$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos((z_1 + z_2)/2) \cos((z_1 - z_2)/2)$;

7) $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$;

8) если $z = x + iy$, то

$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y$, Im sin z = cos x sh y, Im cos z = $-$sin x sh y

9) если $z = x + iy$, то

$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$, $\quad |\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$;

$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$, $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x}$

10) доказать, что

если sin z = 0, то z = $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

если cos z = 0, то z = $\pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

11) найти множество точек, в которых и sin z, и cos z принимают действительные значения;

12) найти множество точек, в которых и sin z, и cos z принимают чисто мнимые значения;

13) доказать, что функции sin z и cos z непрерывны на **C;**

14) доказать, что не существует $\lim\limits_{z\to\infty} \sin z$ и $\lim\limits_{я\to\infty} \cos z$;

15) доказать, что для $z = x + iy$ справедливы неравенства $|\operatorname{sh} y| \le |\cos z| \le \operatorname{ch} y$, $|\operatorname{sh} y| \le |\sin z| \le \operatorname{ch} y$;

16) доказать, что для $z = x + iy$ справедливы равенства $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$

3.27. Для функций tg z и ctg z

а) доказать следующие утверждения:

1) tg ($-$z) = $-$tg z, ctg ($-$z) = $-$ctg (z);

2) tg (z + $k\pi$) = tg z, ctg (z + $k\pi$) = ctg z, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

3) tg (z + $\pi/2$) = $-$ctg z;

4) tg (iz) =i th z, ctg (iz) = i cth z;

5) если $z = x + iy$, то

$$\operatorname{Re} \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad \operatorname{Re} \operatorname{ctg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x},$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad \operatorname{Im} \operatorname{ctg} z = -\frac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x};$$

6) если $z = x + iy$, то

$$|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}, \quad |\operatorname{ctg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}};$$

7) область определения функции tg z – вся комплексная плоскость **C**, кроме точек $z = \pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а функции ctg z – вся плоскость **C**, кроме точек $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

8) функции tg z и ctg z непрерывны на области определения;

9) $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{tg} z$, $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ctg} z$ не существуют;

10) $\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} \overline{z}$, $\overline{\operatorname{ctg} z} = \operatorname{ctg} \overline{z}$;

б) найти множества точек, в которых функции tg z, ctg z принимают

11) действительные значения;

12) чисто мнимые значения.

3.28. Для функций sh z и ch z доказать следующие утверждения:

1) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$;

2) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

3) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

4) $\operatorname{sh}(z + ik\pi) = (-1)^k \operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch}(z + ik\pi)$

$$= (-1)^k \operatorname{ch} z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

5) $\operatorname{sh}(z + i\pi/2) = i \operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch}(z + i\pi/2) = i \operatorname{sh} z$;

6) $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$;

7) при $z = x + iy$

$$\operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y, \quad \operatorname{Re} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y,$$
$$\operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y, \quad \operatorname{Im} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \sin y;$$

8) при $z = x + iy$

$$|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y};$$

$$|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y},$$

$$|\operatorname{th} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}}.$$

9) функции sh z и ch z являются непрерывными на комплексной плоскости **C**;

10) $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{sh} z$ и $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ch} z$ не существуют;

11) функция sh z обращается в нуль только в точках $z = ik\pi$, а функция ch z – только в точках $z = i(\pi/2 + k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

12) при $z = x + iy$

$$|\text{sh}\, x| \le |\text{ch}\, z| \le \text{ch}\, x, \quad |\text{sh}\, x| \le \text{sh}\, z| \le \text{ch}\, x;$$

а) найти множества точек z, в которых функции sh z, ch z принимают действительные значения;

б) найти множества точек z, в которых функции sh z, ch z принимают чисто мнимые значения;

13) доказать формулы: $\overline{\text{ch} z} = \text{ch}\,\overline{z}$, $\overline{\text{sh} z} = \text{sh}\,\overline{z}$.

3.29. Рассмотрим многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \ a_0 \ne 0 \ ;$$

а) является ли $P_n(z)$ непрерывной функцией на **C**?

б) верно ли, что $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})$?

3.30. Доказать, что $\lim\limits_{z \to \infty} P_n(z) = \infty$.

3.31. Показать, что уравнение $P_n(z) = 0$ имеет n корней с учетом кратности.

3.32. Рассмотрим рациональную функцию $R(z)$;

а) показать, что $R(z)$ имеет на **C** не более конечного числа точек разрыва и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{z \to \infty} R(z)$;

б) верно ли, что $\overline{R(z)} = R(\overline{z})$?

3.33. Какие из следующих функций являются равномерно непрерывными на множестве $\{z : |z| < 1\}$:

1) $\dfrac{1}{1-z}$; 2) $\dfrac{1}{1+z^2}$; 3) $e^{1/(z-1)}$; 4) $e^{-1/|z-1|}$; 5) $e^{-1/|z-i|}$;

6) $e^{-1/(z-i)^2}$; 7) sin z; 8) $\sin\dfrac{1}{z-1}$; 9) ch z.

3.34. Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-1/z}$ в области $\{0 < |z| < R$, $|\arg z| < \alpha\}$.

1) При каких α функция $e^{-1/z}$ непрерывна в этой области?

2) При каких α функция $e^{-1/z}$ равномерно непрерывна в этой области?

3.35. Рассмотрим функцию $f(z)=e^{-1/z^2}$ в области $\{0<|z|<R,$ $|\arg z|\le\alpha\}$.

1) При каких α функция $f(z)=e^{-1/z^2}$ непрерывна в этой области?

2) При каких α функция $f(z)=e^{-1/z^2}$ равномерно непрерывна в этой области?

3.36. Какие из следующих функций являются равномерно непрерывными в области $\{z: 0<|z|<1\}$:

1) $\operatorname{Re}(z)/z$; 2) $\operatorname{Im}(z)/z$; 3) $\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(z)/z$; 4) $z^2/|z^2|$; 5) $(\operatorname{Re} z)^2/|z|$; 6) $\operatorname{Im}(z^2)/|z|$; 7) $(z\operatorname{Re} z)/|z|$; 8) $(z\operatorname{Im} z)/|z|$.

3.37. Доказать, что функция e^{z^2} равномерно непрерывна в области $\{z\in\mathbf{C}: |\arg z\pm\pi/2|\le\alpha<\pi/4\}$.

3.38. Доказать, что $\lim\limits_{z\to\infty}e^{z^2}=\infty$, если

$$z\in\{z\in\mathbf{C}: |\arg z|\le\alpha<\pi/4,\ |\arg z-\pi|\le\alpha>\pi/4\}.$$

3.39. Пусть $0<\rho<\pi/2$. Обозначим

$$D_\rho=\mathbf{C}\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{z: |z-n\pi|<\rho\}.$$

Доказать, что при $z\in D_\rho$ справедливы неравенства

$$|\sin z|\ge\sin\rho,\quad |\operatorname{ctg} z|\le\operatorname{cth}\rho.$$

3.40. Пусть $P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. Доказать, что $\lim\limits_{z\to\infty}e^{P_n(z)}=\infty$, если

$$z\in\{z\in\mathbf{C}: |\arg z-2k\pi/n|\le\alpha<\pi/2^n, k=0,1,2,\ldots,n-1\}.$$

3.41. Доказать, что при $|z|\le R$ справедливы неравенства

$$|\operatorname{ch} z|\le\operatorname{ch} R,\quad |\operatorname{sh} z|\le\operatorname{sh} R,\quad |\cos z|\le\operatorname{ch} R,\quad |\sin z|\le\operatorname{sh} R.$$

3.42. Доказать, что для многочлена

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_0\ne0,$$

существует такое $R>0$, что в области $\{z: |z|>R\}$ функция $P_n(z)/z^n$ равномерно непрерывна.

3.43. Доказать, что для рациональной функции $R(z)$ существует такое $R>0$ и такое натуральное m, что функция $R(z)/z^m$ равномерно непрерывна в области $\{z: |z|>R\}$.

3.44. Верно ли утверждение предыдущей задачи для функции $e^{P_n(z)}$, где $P_n(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$.

3.45. Показать, что при $|\alpha| < 1$ рациональная функция $f(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$ является непрерывной в замкнутом круге $\{z\colon |z| \leq 1\}$ и отображает взаимно однозначно этот круг на себя.

3.46. Показать, что рациональная функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z}, \text{ где } |\alpha_k| < 1,\ k=1, 2, \ldots, n,$$

является непрерывной в замкнутом круге $\{z\colon |z| \leq 1\}$, и в этом круге справедливо неравенство $|f(z)| \leq 1$. Доказать при этом, что $|f(z)| = 1$ тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

Глава 4

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$, определенная на множестве Z, сходится на этом множестве к функции $f(z)$, если $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ для любого $z \in Z$.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, где каждая функция $f_k(z)$ определена на множестве Z, сходится на этом множестве, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ для любого $z \in Z$.

Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве Z равномерно к функции $f(z)$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall z\in Z \Rightarrow |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon .$$

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве Z, если

$$\exists A>0 : |f_n(z)| \leq A, \forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in Z .$$

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ называется *последовательностью с равномерно ограниченным изменением* на множестве Z, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)-f_{n+1}(z)|$ сходится равномерно на множестве Z.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве Z равномерно тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p\in \mathbf{N}, \forall z\in Z \Rightarrow |f_{n+p}(z)-f_n(z)|<\varepsilon .$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на множестве Z равномерно к сумме $f(z)$, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall z\in Z \Rightarrow |f_n(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)|<\varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на множестве Z равномерно тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N}, \forall z \in Z \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon .$$

Признаки равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса. Если для любого натурального n справедливо неравенство $\sup\limits_{z\in Z}|f_n(z)| \leq a_n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на множестве Z.

Признак Дирихле. Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(z)$ на множестве Z достаточно, чтобы частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} v_k(z)$ были равномерно ограничены по n и по z, а последовательность $\{u_n(z)\}$ была последовательностью с равномерно ограниченным изменением при $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z) = 0$.

Следствие. Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(z)$ на множестве Z достаточно, чтобы частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} v_k(z)$ были равномерно ограничены по n и по z, а последовательность $\{u_n(z)\}$, принимающая действительные значения, была монотонной по n при фиксированном z и равномерно по z стремилась к нулю.

Признак Абеля. Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(z)$ на множестве Z достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ равномерно сходился на множестве Z, а последовательность $\{v_n(z)\}$ была последовательностью с равномерно ограниченным изменением и $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(z)$ был ограниченной функцией на множестве Z.

Следствие. Для равномерной сходимости на множестве Z ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(z)$ достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ равномерно сходился на множестве Z, а последовательность $\{v_n(z)\}$, принимающая действительные значения, была монотонной по n и на множестве Z – ограниченной.

Пусть $r_n(z) = f(z) - f_n(z)$. Чтобы функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась на множестве Z к функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in Z}|r_n(z)|=0.$$

Пусть $r_n(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$. Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходился на множестве Z к $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in Z}|r_n(z)|=0.$$

Теорема. Если функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве Z равномерно к функции $f(z)$ и функции $f_n(z)$ непрерывны на Z, то функция $f(z)$ также непрерывна на Z.

Теорема. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на множестве Z равномерно к функции $f(z)$ и функции $f_n(z)$ непрерывны на Z, то сумма $f(z)$ также непрерывна на множестве Z.

Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри области D, если она равномерно сходится на любом компакте $K \subset D$.

Семейство функций $\{f(z)\}$, определенных на множестве Z, называется *равностепенно непрерывным* на Z, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall z_1, z_2\in Z,\ |z_1-z_2|<\delta, \forall f\in\{f(z)\}$$
$$\Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

Семейство функций $\{f(z)\}$ образует ограниченное внутри области D множество, если для любого компакта $K \subset D$

$$\exists C(K)>0: \forall f\in\{f(z)\},\ \forall z\in K \Rightarrow |f(z)|\le C.$$

Функциональное бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)),$$

где функции $f_n(z)$ определены на множестве z, $f_n(z) \neq -1$, $z \in Z$, называется *сходящимся на множестве* Z, если оно сходится в каждой точке $z \in Z$.

Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ называется *равномерно сходящимся на множестве* Z, если последовательность частичных произведений $\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$ равномерно сходится на множестве Z.

Достаточный признак равномерной сходимости бесконечного произведения. Если для любого натурального n справедливо неравенство $\sup\limits_{z\in Z}|f_n(z)|\le a_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то на множестве Z бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ сходится абсолютно и равномерно, а бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|)$ также сходится равномерно.

4.1. Доказать критерий Коши равномерной сходимости
а) функционального ряда,
б) функциональной последовательности.

4.2. Доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

4.3. Доказать признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

4.3.1. Привести пример, показывающий, что в признаке Дирихле условие $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z)=0$ является существенным.

4.4. Доказать признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

4.4.1. Привести пример, показывающий, что в признаке Абеля условие – $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(z)$ есть ограниченная функция на множестве Z – является существенным.

4.4.2. Верно ли утверждение: для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)v_n(z)$ на множестве Z достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ равномерно сходился на множестве Z к сумме, которая ограничена на этом множестве, а последовательность $\{v_n(z)\}$ была последовательностью с равномерно ограниченным изменением.

4.5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{z\in Z}|r_n(z)|=0$ – необходимое и достаточное условие, чтобы функциональный ряд или функциональная последовательность сходились равномерно.

4.6. Доказать, что если функциональная последовательность $f_n(z)$, составленная из непрерывных функций на множестве Z, сходится равномерно к $f(z)$ на множестве Z, то функция $f(z)$ непрерывна на Z.

4.7. Найти множества, на которых равномерно сходятся следующие последовательности:

$$1)\ \left\{\frac{1}{1+z^n}\right\};\qquad 2)\ \left\{\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right\};\qquad 3)\ \left\{\frac{\sin nz}{n}\right\}.$$

4.8. При каких действительных значениях α последовательность $f_n(z)=n^\alpha z e^{-nz}$:

1) сходится;

2) сходится равномерно на области сходимости.

4.9. Доказать, что последовательность $f_n(z)=nze^{-n^2z^2}$ равномерно сходится в угле $|\arg z|\le\alpha$, $0<\alpha<\pi/4$, к функции $f(z)\equiv 0$.

4.10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ сходится равномерно на множестве Z, то сходится равномерно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, $z\in Z$.

4.11. Найти область сходимости следующих рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} nz}{n};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} nz}{n};\quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^n};\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+z^n};$$

$$7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n};\quad 8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right);\ 9)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right);$$

$$10)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-nz};\quad 11)\ \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nz};\quad 12)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{z\ln n}.$$

4.12. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(z-z_n)}$, где $z_n=e^{in}$, будет сходиться при всех z, не лежащих на окружности $|z|=1$.

4.13. Показать, что сумма ряда $s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ равна $\frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z|<1$ и $\frac{1}{z(1-z)^2}$ при $|z|>1$.

4.14. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{z}{2^n}$ будет абсолютно сходиться при всех $z\in\mathbf{C}$.

4.15. Пусть $|c|<1$. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c^{n^2}e^{nz}$ абсолютно сходится при всех $z\in\mathbf{C}$.

4.16. Показать, что ряд

$$z+\frac{a-b}{2!}z^2+\ldots+\frac{(a-b)(a-2b)\ldots(a-(n-1)b)}{n!}z^n+\ldots$$

абсолютно сходится при $|z|<|b|^{-1}$.

4.17. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{z^n-(1+1/n)}$ абсолютно сходится при $|z|<1$.

4.18. Доказать, что гипергеометрический ряд

$$1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\ldots$$

$$+\frac{a(a+1)\ldots(a+(n-1)\cdot b(b+1)\ldots(b+(n-1))}{n!c(c+1)\ldots(c+(n-1))}z^n+\ldots,$$

где $c\neq 0,-1,\ldots,-(n-1),\ldots$, сходится абсолютно при $|z|<1$, расходится при $|z|>1$, а при $|z|=1$ необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости – это

$$\mathrm{Re}\,(a+b-c)<0.$$

4.19. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^2+n}$ сходится при $|z|<1$, но не абсолютно.

4.20. Определить область абсолютной сходимости рядов (p – действительное число):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^p}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nz}{n^p}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch} nz}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} nz}{n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+z^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2 z}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} nz}{n^p}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch} nz}{n^p}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{n^2 z}$.

4.21. Найти область равномерной сходимости рядов (p – действительное число):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nz}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nz}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nz}{n^p}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nz}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(z^n+z^{-n}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z+n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+z^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{z+z^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2 z}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} nz}{n^p}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch} nz}{n^p}$.

4.22. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на множестве Z. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ сходится на множестве Z?

4.23. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на множестве Z и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ на этом множестве. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ будет сходиться равномерно на множестве Z?

4.24. Привести пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, который сходится абсолютно, но не равномерно на множестве Z.

4.25. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^2}{(1+z^2)^n}$ сходится абсолютно, но не равномерно на множестве $\{z\in\mathbf{C}: |\arg z|\le\pi/4\}$.

4.26. Доказать, что на множестве Z = {z: | z | < 1, |arg z| ≤ π/4} ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^2}{(1+z^2)^n}$ сходится абсолютно и равномерно, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|z^2|/|(1+z^2)^n|$ на множестве Z равномерно сходиться не будет.

4.27. Определить область существования для функции $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{(1+z)^k}$ и исследовать ее на непрерывность.

4.28. Доказать, что для того чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ непрерывных функций равномерно сходилась на компакте K к функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ сходилась во всех точках этого множества: $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z), z\in K,$ и если z_0 – предельная точка K, то для любой последовательности $\{z_n\}, z_n\in K, \lim_{n\to\infty} z_n=z_0$, справедливо $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z_0)$.

4.29. Определить область существования функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n^2+z^2}$$

и исследовать ее на непрерывность.

4.30. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nze^{-nz}-(n-1)ze^{-(n-1)z})$$

и найти его сумму. Показать, что сумма ряда есть функция непрерывная, но ряд на области сходимости сходится неравномерно.

4.31. Определить область существования θ-функции

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 z}.$$

Показать, что на области существования θ(z) есть функция непрерывная.

4.32. Определить область существования суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{2^n}.$$

4.33. Доказать непрерывность суммы ряда в указанных областях:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,(n+z)},\ z\neq-1,-2,\ldots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z-n},\ z\neq1,2,\ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z(z+n)}{n}\right)^n,\ |z|<1;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nz}{n!},\ |z|<\infty;$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} nz}{n!},\ \ |z|<\infty;$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n e^{n^2 z},\quad \operatorname{Re} z<0;$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{z^2 n},\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4},-\dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}.$

4.34. Показать, что семейство функций $\{\cos(\alpha/(1-z))\}$, α – действительное число, образует ограниченное внутри области $D=\{|z|<1\}$, но неограниченное в области D семейство.

4.35. Привести пример равностепенно непрерывного на области D, но неограниченного внутри D семейства функций.

4.36. Привести пример семейства функций, ограниченного внутри области D, но не равностепенно непрерывного на области D.

4.37. Верно ли утверждение: любое семейство непрерывных функций, ограниченное внутри области D, является равностепенно непрерывным на любом компакте $K\subset D$.

4.38. Пусть семейство функций равностепенно непрерывно на области D и ограничено внутри D. Следует ли отсюда:

1) из данного семейства можно выбрать сходящуюся подпоследовательность функций на области D;

2) из данного семейства можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность функций на области D.

4.39. Доказать, что на множестве Z бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ сходится равномерно и абсолютно, если для всех $z \in Z$ справедливо неравенство $|f_n(z)| \le a_n$, $n \in \mathbf{N}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|)$ сходится также равномерно на множестве Z.

4.40. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|^2$ сходятся равномерно на множестве Z, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ также равномерно сходится на множестве Z.

4.41. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n z)$?

4.42. Пусть c – константа, $c \neq -1, -2, \ldots$. Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{c+n}\right)e^{z/n}$ абсолютно сходится при $|z| < \infty$.

4.43. Показать, что при $|z| > 1$ бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}\right]$ сходится.

4.44. Найти области сходимости бесконечных произведений:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{z^2}{n^{\frac{1}{2}}})$; 3) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{z}{n})e^{-z/n}$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{z}{n}$; 5) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(z/n)}{z/n}\right)$; 6) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$.

4.45. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{e^{z\ln n}}\right)$ сходится при $\operatorname{Re} z > ½$, абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z > 1$.

4.46. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z+n}e^{z\ln\frac{n+1}{n}}$ сходится абсолютно во всей комплексной плоскости **C**, кроме точек $z = -1, -2, \ldots$. Это произведение обозначают $\Gamma(z+1)$ и называют *гамма-функцией*.

4.47. Доказать *формулу Эйлера:* $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!e^{z\ln n}}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

4.48. Доказать, что: 1) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$; 2) $\Gamma(m+1) = m!$.

4.49. Доказать *формулу Вейерштрасса:*

$$[\Gamma(z+1)]^{-1} = e^{cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

c – постоянная Эйлера.

4.50. Показать, что при $\alpha, \beta \neq -1, -2, \ldots$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}.$$

4.51. Доказать, что следующие бесконечные произведения сходятся равномерно на указанных областях:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}), |z| \le R < \infty$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, |z| \le R < \infty$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n), |z| \le r < 1$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n}), |z| \le r < 1$.

4.52. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ сходится равномерно на множестве Z, то и бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ сходится равномерно на множестве Z.

4.53. Пусть бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ сходится равномерно на множестве Z. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на множестве Z?

4.54. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на множестве Z. Следует ли отсюда, что на множестве Z сходится равномерно бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$?

4.55. Доказать, что следующие бесконечные произведения представляют собой непрерывные функции в указанных областях:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n), |z| < 1$;

2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, |z| < \infty, z \notin \mathbf{Z}$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{n}, |z| < \infty, z \neq \frac{\pi}{2}n(2k+1)$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z}\sin\frac{z}{n}, |z|<\infty, z\neq k\pi;$

5) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\frac{z}{n}\right), |z|<\infty, z\neq(-1)^{n+1}n;$

6) $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{z}{2^n}, |z|<\infty, z\neq i\,2^{n-1}(2k+1)\pi;$

7) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n}, |z|<\infty, z\neq 2^{n-1}(2k+1)\pi;$

8) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{2^n}\right), |z|<2.$

4.56. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_n|<1$, $n\in\mathbf{N}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-a_k z}\cdot\frac{|a_k|}{a_k}$ сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга $|z|<1$ и не превосходит по модулю 1.

Глава 5
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Комплекснозначная функция $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ действительного переменного t называется *дифференцируемой в некоторой точке* t_0, если в этой точке дифференцируемы действительные функции $f_1(t), f_2(t)$.

Комплекснозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$, а $v(x, y)$, $u(x, y)$ – действительные функции) комплексного переменного z, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbf{C}$, называется дифференцируемой в точке z_0, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

который называется *производной* функции $f(z)$ в точке z_0. Если функция дифференцируема в точке z_0, то она и непрерывна в точке z_0.

Если существуют производные функций $f(z)$, $g(z)$ в точке z_0, то в этой точке существуют производные функций $f(z) \pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$, $f(z) / g(z)$ $(g(z_0) \neq 0)$ и справедливы равенства

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

$$(f / g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}, g(z_0) \neq 0.$$

Из существования производной $f'(z_0)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ с необходимостью вытекают следующие равенства:

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0),$$

которые называются *условиями Коши–Римана* (CR). Если ввести следующие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0),$$

то будут справедливы соотношения

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ f'(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0),\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Таким образом, верна следующая

Теорема. Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия (CR).

Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *открытым*, если каждая точка этого множества содержится в нем вместе с некоторой окрестностью, т. е. для любой точки $z_0 \in D$ найдется число $R > 0$, такое, что $\{z: |z - z_0| < R\} \subset D$. (Если $z_0 = \infty \in D$, то найдется такое $R > 0$, что $\{z: |z| > R\} \subset D$).

Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить кривой Жордана, целиком лежащей в D.

Открытое связное множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *областью*.

Область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура Жордана, лежащего в области D, его внутренность также лежит в D. Область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной*.

Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *замкнутым*, если множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ является открытым.

Однозначная функция $f(z)$, определенная в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, называется *однолистной*, если для любых точек $z_1, z_2 \in D$ и таких, что $z_1 \neq z_2$, имеем $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Если функция $\omega = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и в этой окрестности $f'(z) \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является однолистной и в окрестности точки $\omega_0 = f(z_0)$ существует обратная функция $z = f^{-1}(\omega)$, которая дифференцируема в этой окрестности точки ω_0, и справедлива формула дифференцирования обратной функции:

$$(f^{-1}(\omega))' = (f'(z))^{-1}.$$

Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* (иногда используются термины "голоморфная", "регулярная") в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Аналитичность в точке означает аналитичность в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется аналитической в точке $z = \infty$, если функция $g(z) = f(z^{-1})$ аналитична в точке $z = 0$.

Геометрический смысл производной

В каждой точке z_0, в которой $f'(z) \neq 0$, при отображении f имеет место сохранение (консерватизм) углов по величине и по направлению отсчета между любыми двумя гладкими кривыми Жордана, пересекающимися в точке z_0, и их образами при отображении f. Кроме того, в этом случае величина $|f'(z_0)|$ совпадает с искажением масштаба при отображении f и это искажение одно и то же по всем направлениям, выходящим из точки z_0.

Если функция $f(\zeta)$ аналитична в области G, а функция $\varphi(z)$ аналитична в области D и множество значений функции $\varphi(z)$ является областью и содержится в G, то в области D определена *суперпозиция функций* f и φ – функция $f(\varphi(z))$, которая аналитична в D, и справедлива формула дифференцирования суперпозиции:

$$f'_z(\varphi(z)) = f'_\zeta(\varphi(z))\,\varphi'(z).$$

5.1. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:

1) $\operatorname{Re} z$; 2) $\bar{z}$; 3) $|z|$; 4) $|z|^2$; 5) $z \operatorname{Re} z$; 6) $x^2 y^2$; 7) $x^2 + iy^2$;

8) $\sqrt{|xy|}$; 9) $2xy - i(x^2 - y^2)$; 10) $x + iy^2$; 11) z^{-1} 12) $z^2 \cdot \bar{z}$;

13) $z \cdot \overline{z^2}$; 14) $(az + b) / (cz + d)$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$;

15) $\sin x + i \cos x$; 16) $\cos x + i \sin x$; 17) $e^x + i e^y$;

18) $e^x + i \sin x$; 19) $\operatorname{tg} x + i \operatorname{ctg} y$.

5.2. Доказать аналитичность всюду в $\mathbf{C}$ и найти производные следующих функций:

1) z^n, n – натуральное;

2) $R(z) = P(z) / Q(z)$ – рациональная функция (кроме точек z, в которых $Q(z) = 0$);

3) e^z; 4) e^{iz}; 5) $\sin z$; 6) $\cos z$; 7) $\operatorname{ch} z$; 8) $\operatorname{sh} z$;

9) $\operatorname{ctg} z$ (кроме точек z, в которых $\sin z = 0$);

10) $\operatorname{tg} z$ (кроме точек z, в которых $\cos z = 0$);

11) $\operatorname{th} z$ (кроме точек z, в которых $\operatorname{ch} z = 0$);

12) $\operatorname{cth} z$ (кроме точек z, в которых $\operatorname{sh} z = 0$);

13) $\sin(e^z)$; 14) $z^n e^{-z}$, n – натуральное; 15) $(z + 1/z)/2$, $z \neq 0$.

5.3. Показать, что функция

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

аналитична всюду в $\mathbf{C}$, кроме точки $z = 0$, а условия (CR) выполняются всюду в $\mathbf{C}$.

5.4. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ и всюду в D выполняется одно из условий:

1) $\operatorname{Re} f(z) = \text{const}$; 2) $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$;

3) $|f(z)| = \text{const}$; 4) $\arg f(z) = \text{const}$,

то $f(z)$ – константа всюду в области D.

5.5. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$ и всюду в D $u(x, y) = \varphi(v(x, y))$, $\varphi(t)$ – действительнозначная, строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция при $-\infty < t < \infty$. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$ в D.

5.6. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$ и всюду в D $au + bv + c = 0$, где действительные константы a, b, c не все равны нулю. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$ в D.

5.7. Пусть функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$. Будут ли аналитическими функции $\overline{f(z)}$ и $f(\overline{z})$?

5.8. Пусть функция $f(z) = u + iv$, причем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что если всюду в D выполнено одно из условий:

а) существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$; б) существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \operatorname{Im} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$,

то функция $f(z)$ аналитична в D.

5.9. Пусть $f(z) = u + iv$, причем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что если в каждой точке области D существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta f}{\Delta z}\right|$, то либо функция $f(z)$, либо функция $\overline{f(z)}$ аналитична в области D.

5.10. Пусть $f(z) = u + iv$, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что если в каждой точке из D существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, то функция $f(z)$ аналитична в области D.

5.11. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Доказать, что условия (CR) в переменных (r, φ) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

5.12. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$, а векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ на плоскости перпендикулярны, причем поворот от $\mathbf{s}$ к $\mathbf{n}$ совершается против часовой стрелки. Доказать, что если $|\mathbf{s}| = |\mathbf{n}| = 1$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}; \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}.$$

5.13. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области $D \subseteq \mathbf{C}$. Доказать, что в каждой точке $z \in D$ справедливы соотношения:

1) $f'(z) = u'_x + iv'_x$; 2) $f'(z) = v'_y - iu'_y$;
3) $f'(z) = u'_x - iu'_y$; 4) $f'(z) = v'_y + iv'_x$.

5.14. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z},\ dz = dx + idy,\ d\overline{z} = dx - idy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

5.15. Пусть $f(z) = u + iv$, причем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что функция $f(z)$ аналитична в области D тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (*условие Даламбера-Эйлера*).

5.16. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что якобиан преобразования от переменных (x, y) к переменным (u, v) вычисляется по формуле

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2.$$

5.17. (Продолжение задачи 5.16.) Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$, то $\left|f'(z)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$.

5.18. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$ и область $G \subset D$. Пусть, кроме того, G' – область, являющаяся образом области G при отображении f. Если $f(z)$ однолистна в области G, то площадь $S(G')$ может быть вычислена по формуле

$$\iint_G |\, f'(z)\,|^2\ dx\, dy.$$

5.19. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дважды дифференцируемы. Доказать, что

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

5.20. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$ и $f(z) \neq 0$ всюду в D. Доказать, что всюду в D справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} \log |\, f(z)\,| = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

5.21. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать, что всюду в D

1) $\Delta\, |f(z)|^2 = 4\, |f'(z)|^2$; 2) $\Delta \log(1+|f(z)|^2) = \dfrac{4\,|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}$;

3) $\Delta \log |f(z)| = 0$, если $f(z) \neq 0$.

5.22. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ для следующих функций:

1) $f(z) = |z|$; 2) $f(z) = |z|^p$, $p \in \mathbf{R}$; 3) $f(z) = e^{p|z|}$, $p \in \mathbf{R}$;

4) $f(z) = \sqrt{|\, z-a\,|^2 + |\, z-b\,|^2}$; 5) $f(z) = \log |z|$;

6) $f(z) = |z-a|\,/\,|z-b|$; 7) $f(z) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+|\,z\,|}{1-|\,z\,|}$, $|\,z\,| < 1$.

5.23. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$. Доказать следующие формулы:

1) $\dfrac{\partial}{\partial z} |\, f(z)\,| = \dfrac{1}{2}\, |\, f(z)\,|\, \dfrac{f'(z)}{f(z)}$; 2) $\dfrac{\partial}{\partial z} u = \dfrac{1}{2} f'(z)$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial z} v = -\dfrac{1}{2} f'(z)$; 4) $\dfrac{\partial}{\partial z} \varphi(|\, f(z)\,|) = \dfrac{1}{2} \varphi'(|\, f(z)\,|)\, |\, f(z)\,|\, \dfrac{f'(z)}{f(z)}$,

где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция действительного переменного t.

5.24. Используя формулу для производной обратной функции, доказать, что

1) $(\sqrt[n]{z})' = \dfrac{\sqrt[n]{z}}{nz}$, n – натуральное;

2) $(\ln z)' = z^{-1}$; 3) $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

4) $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$; 5) $(\arccos z)' = -\dfrac{1}{1-z^2}$.

5.25. Найти зависимость между следующими функциями:

1) $\arccos z$, $\ln z$; 2) $\arcsin z$, $\ln z$; 3) $\operatorname{arctg} z$, $\ln z$.

5.26. Пусть функция $f(z) = \ln(z-c) \equiv \ln|z-c| + i\operatorname{Arg}(z-c)$, где c – некоторое фиксированное комплексное число. Проверить выполнимость условий Коши–Римана для этой функции.

5.27. Найти множество точек z, в которых коэффициент линейного растяжения при следующих отображениях равен нулю:

1) $f(z) = z^2$; 2) $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$;

4) $f(z) = z^n$, n – натуральное; 5) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

5.28. Найти множество точек z, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:

1) $f(z) = z^2$; 2) $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$;

4) $f(z) = z^n$, n – натуральное; 5) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

5.29. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что угол поворота α кривой γ в точке z_0 и коэффициент линейного растяжения R при отображении f определяется следующим образом:

$$\alpha = \arg f'(z_0) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},\ R = |f'(z_0)|.$$

5.30. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, $f'(z_0) \neq 0$, и гладкие кривые γ_1 и γ_2, проходящие через точку z_0, обладают свойством $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$, $z \in \gamma_1$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, $z \in \gamma_2$. Доказать, что в этом случае кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в точке z_0 под прямым углом.

5.31. При выполнении условий задачи 5.30 предположим дополнительно, что $|f(z)| = |f(z_0)|$, $z \in \gamma_1$, а $\arg f(z) = \arg f(z_0)$, $z \in \gamma_2$. Доказать, что кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в точке z_0 под прямым углом.

5.32. Пусть $f(z) = u + iv$, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \mathbf{C}$ и для любых точек z_1 и z_2 из D

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

Доказать, что $f(z) = e^{i\theta} z + a$, где θ – действительный, а a – комплексный параметр, или $f(z) = e^{i\theta}\bar{z} + a$.

5.33. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $d(z_1, z_2)$ – расстояние между стереографическими проекциями точек z_1 и $z_2 \in \mathbf{C}$. Доказать, что существует

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d(f(z), f(z_0))}{d(z, z_0)}$$

и найти его.

5.34. Пусть функция $f(z)$ рациональна и $d(z_1, z_2)$ – расстояние между стереографическими проекциями точек z_1 и z_2.. Доказать, что если $d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$ для любых точек z_1 и z_2 из $\mathbf{C}$, то

$$f(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d}.$$

5.35. Пусть функция $f(z)$ рациональна и аналитична в точке $z = 0$. Доказать, что если в любой точке z аналитичности $f(z)$ справедливо равенство

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{1+|z|^2},$$

то f(z) является дробно-линейной функцией.

5.35.1. Пусть функция f(z) рациональна и аналитична в точке z = 0. Доказать, что если в некоторой окрестности точки z = 0 справедливо равенство

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{1+|z|^2},$$

то f(z) является дробно-линейной функцией.

5.35.2. Пусть функция f(z) аналитична в некоторой окрестности точки z = 0 и в этой окрестности справедливо равенство

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1}{1+|z|^2}.$$

Доказать, что f(z) является дробно-линейной функцией.

5.36. Пусть функция f(z) рациональна и аналитична в точке z = 0. Доказать, что если для любого z, | z | < 1, выполнены условия

$$|f(z)|<1, \ \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2},$$

то функция f(z) является дробно-линейной.

5.37. Пусть f(z) = $P(x, y) + i\,Q(x, y)$, где P и Q – многочлены от x и y с действительными коэффициентами, и пусть f(z) – аналитическая функция на **C**. Следует ли отсюда, что f(z) – многочлен от z?

5.38. Верно ли утверждение, что для любого многочлена $P(x, y)$ существует аналитическая функция f(z) на **C**, такая, что Re f(z) = $P(x, y)$?

5.39. Пусть функция f(z) аналитична на круге | z | ≤ 1 и принимает на границе круга (| z | = 1) действительные значения. Доказать, что f(z) ≡ const.

5.40. Пусть $f(z) \neq 0$ и аналитична на круге $|z| \leq 1$. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$, если $|f(z)| = 1$ на $|z| = 1$.

5.41. Пусть функция $f(z)$ аналитична на ограниченной области D и принимает действительные значения на ее границе. Следует ли отсюда, что $f(z) \equiv \text{const}$?

5.42. Пусть $z = r\,e^{i\theta} + a$, $r < R$. Доказать, что функция

$$f(z) = \frac{R\,e^{i\varphi} + (z-a)}{R\,e^{i\varphi} - (z-a)}$$

при фиксированных R и φ есть аналитическая функция от z в круге $|z - a| < R$, при этом

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)}.$$

5.43. Доказать приведенные ниже свойства *ядра Пуассона*

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)}$$

при $0 < r < R$, φ и R – фиксированы.

1) Ядро Пуассона – гармоническая функция от z в круге $|z - a| < R$, где $z = a + r\,e^{i\theta}$.

2) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} \equiv 1.$

3) Если $f(z)$ аналитична в круге $|z - a| \leq R$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + \mathrm{R}e^{i\varphi})(R^2 - r^2)d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}, \; z = a + re^{i\theta}.$$

4) Если $u(z)$ – гармоническая функция в круге $|z - a| \leq R$, то

$$u(z) = u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(R, \varphi)(R^2 - r^2)d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}, z = a + re^{i\theta}.$$

5) Если $h(R, \varphi) \in \mathbf{C}([0, 2\pi])$, $h(R, 0) = h(R, 2\pi)$, то функция

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(R,\varphi)(R^2-r^2)d\varphi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}$$

гармонична в круге $|z-a|<R$, $\lim\limits_{\substack{r\to R\\ \theta\to\varphi}} u(r,\theta)=h(R,\varphi)$.

Глава 6
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z определена на спрямляемой кривой γ. Разобьем кривую γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ с помощью точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, занумерованных в порядке их следования по кривой γ. Началом дуги γ_k является точка z_{k-1}, концом – точка z_k. Выберем на дуге γ_k точку ζ_k и рассмотрим интегральные суммы

$$\sigma_n = \sum_{n=1}^{n} f(\varsigma_k)\,|z_k - z_{k-1}|,\ \sigma'_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Если существуют пределы интегральных сумм σ_n и σ'_n, когда максимум длин дуг γ_k, $k = 1, \ldots, n$, стремится к нулю и при этом пределы не зависят от способа разбиения кривой γ на дуги γ_k и от выбора точек ζ_k на дугах γ_k, то эти пределы называются *криволинейными интегралами* первого и второго рода от функция $f(z)$ вдоль кривой γ и обозначаются соответственно

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \lim_{n\to\infty} \sigma_n,\ \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sigma'_n.$$

Если функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, то справедливы равенства:

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\gamma u(x,y)dl + i\int_\gamma v(x,y)dl,$$

где интегралы $\int_\gamma u(x,y)dl$, $\int_\gamma v(x,y)dl$ – криволинейные интегралы первого рода от действительных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, и

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy)$$

$$+i\int_\gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

где интегралы

$$\int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy),\ \int_\gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

есть криволинейные интегралы второго рода от действительных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$. Поэтому свойства криволинейных интегралов первого и второго рода от функции комплексного переменного $f(z)$ вытекают из свойств криволинейных интегралов первого и второго рода от действительных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ действительных переменных. В частности, справедливы следующие свойства.

1. $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$,

где α и β – комплексные числа, при условии, что существуют интегралы $\int_\gamma f(z)dz$ и $\int_\gamma g(z)dz$;

2. $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$,

где кривая γ есть объединение дуг γ_1 и γ_2, при этом начало кривой совпадает с началом дуги γ_1, конец дуги γ_1 совпадает с началом дуги γ_2 , конец дуги γ_2 совпадает с концом дуги γ, и при условии, что интегралы $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ и $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ существуют;

3. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz|$.

Если функция $f(z)$, заданная на кусочно-гладкой кривой γ, является непрерывной или имеет конечное число точек разрыва и ограничена, то для нее существуют криволинейные интегралы первого и второго рода по кривой γ.

Пусть функция $z = \varphi(w)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение спрямляемой кривой γ на кривую Γ и является аналитической на кривой γ. Тогда, если существует интеграл $\int_\Gamma f(z)dz$, то также существует интеграл $\int_\gamma f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$ и справедливо равенство

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(\varphi(w))\varphi'(w)dw.$$

Интегральная теорема Коши. Пусть D – односвязная область комплексной плоскости **C** и $f(z)$ – аналитическая функция в D; тогда для любой замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, лежащей в D, интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ равен нулю:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Теорема Коши для многосвязной области. Пусть ограниченная область D имеет границу Γ, состоящую из конечного числа замкнутых жордановых спрямляемых кривых. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$ области D, то интеграл от функции $f(z)$ по границе Γ равен нулю:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0,$$

где направление обхода по границе таково, что область D остается слева.

Некоторым обращением теоремы Коши для односвязной области является

Теорема Морера. Пусть D – односвязная область комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $f(z)$ – непрерывная функция в D. Если для любой замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ интеграл по кривой γ равен нулю:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0,$$

то функция $f(z)$ аналитична в D.

Если граница Γ области D такова, что $\Gamma = \cup_{i=0}^n \gamma_i$, где γ_i – замкнутые жордановы кривые ($i = 0, 1, \ldots, n$), внутри кривой γ_0 содержатся кривые $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то для функции $f(z)$, аналитической в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$ области D, справедливо равенство

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz,$$

где направление обхода по кривым $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ таково, что область D остается слева.

Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется *первообразной* или *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$ в D, если $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

Если D – односвязная область плоскости $\mathbf{C}$ и $f(z)$ – аналитическая функция в D, то совокупность ее первообразных в области D имеет вид

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C,\ z_0, z \in D,$$

где C – произвольная константа.

Пусть γ – спрямляемая кривая и последовательность функций $\{f_n(z)\}$ такова, что существуют интегралы $\int_\gamma f_n(z)dz$, $n \in \mathbf{N}$. Если последовательность функций $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно к функции $f(z)$ на кривой γ, то существует интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ и справедливо равенство

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz,$$

где обход по кривой γ для всех интегралов осуществляется в одном направлении.

Пусть γ – спрямляемая кривая и последовательность функций $\{f_n(z)\}$ такова, что существуют интегралы $\int_\gamma f_n(z)dz$, $n \in \mathbf{N}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на кривой γ к сумме $S(z)$, то функция $S(z)$ интегрируема на γ и справедливо равенство

$$\int_\gamma S(z)dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz,$$

где обход по кривой γ для всех интегралов осуществляется в одном направлении.

Пусть функция $f(z, \zeta)$ определена в области D комплексной плоскости $\mathbf{C}$, параметр $\zeta \in \gamma$ – жорданова кусочно-гладкая кривая. Если функция $f(z, \zeta)$ аналитична в D при любом фиксированном $\zeta \in \gamma$ и непрерывна по $\zeta \in \gamma$ при любом фиксированном $z \in D$, то функция $F(z) = \int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta$ аналитична в D и

$$F'(z) = \int_\gamma f_z'(z,\zeta)d\zeta.$$

Пусть функция $f(z, t)$ определена для $z \in D$ и $t \in [a, +\infty)$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ называется *равномерно сходящимся* в области D, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 > 0, \forall A > A_0, \forall z \in D \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(z,t)dt \right| < \varepsilon.$$

Пусть $f(z, t)$ аналитична по $z \in D$ при любом $t \in [a, +\infty)$ и непрерывна по $t \in [a, +\infty)$ при любом $z \in D$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ сходится равномерно в области D, то функция $F(z) = \int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ аналитична в D и

$$F'(z) = \int_a^{+\infty} f_z'(z,t)dt\,.$$

Интеграл $\int_a^{+\infty} f_z'(z,t)dt$ также будет равномерно сходиться в D.

Аналогичная теорема справедлива для $t \in (-\infty, a]$, $t \in \mathbf{R}$. Далее в задачах, если не оговорено особо, под *кривой* будем понимать жорданову кусочно-гладкую кривую. Если кривая замкнута, то положительное направление таково, что конечная область, ограниченная этой кривой, остается слева при обходе по кривой.

6.1. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, $z = x + i\, y$, и существует криволинейный интеграл первого рода $\int_\gamma f(z)|\, dz\,|$. Доказать, что

$$\int_\gamma f(z)|\, dz\,| = \int_\gamma u(x,y)\, dl + i \int_\gamma v(x,y)\, dl\,,$$

где dl – дифференциал длины дуги γ.

6.2. Показать, что криволинейный интеграл второго рода по кривой γ равен

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy)$$
$$+ i \int_\gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy)\,.$$

6.3. Показать, что $\int_\gamma z^n dz = \left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right)/(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$, где кривая γ имеет началом точку z_0, концом – точку z_1.

6.4. Пусть γ – замкнутая кривая. Показать, что $\int_\gamma |dz| = |\gamma|$, $\int_\gamma dz = 0$, где $|\gamma|$ – длина кривой γ.

6.5. Вычислить $\int_\gamma |z|\, dz$ в следующих случаях:

1) γ – прямолинейный отрезок, идущий из точки $z = -i$ в точку $z = i$;

2) γ – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, идущая из точки $z = -i$ в точку $z = i$.

6.6. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} |z-1|\, dz$.

6.7. Показать, что если кривая γ является замкнутой и S – площадь области, ограниченной этой кривой, то:

1) $\int_\gamma x\, dz = iS$; 2) $\int_\gamma y\, dz = -S$; 3) $\int_\gamma z\, dz = 0$.

6.8. Пусть кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Показать, что приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ вдоль γ может быть вычислено по формуле

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Вывести отсюда, что $\Delta_\gamma \arg z = 0$, если контур γ не содержит внутри себя точку $z = 0$, и что $\Delta_\gamma \arg z = 2n\pi$, $n \in \mathbf{N}$, если точка $z = 0$ лежит внутри контура γ, а кривая γ обходится n раз против часовой стрелки.

6.9. Пусть $\rho > 0$, окружность $|z| = \rho$ обходится один раз против часовой стрелки. Доказать равенство

$$\int_{|z|=\rho} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, n = -1, \\ 0, \quad n = 0, +1, \pm 2 \ldots \end{cases}$$

6.10. Доказать неравенство

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|\,dz\,|}{|\,z^2 - a^2\,|} \le \frac{2\pi\rho}{|\,\rho^2 - |\,a\,|^2|},\ 0 < \rho \ne |\,a\,|.$$

6.11. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|\,dz\,|}{|\,z-a\,|^2},\ |\,a\,| \ne \rho.$$

6.12. Вычислить интеграл $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$, $n \in \mathbf{N}$, в случаях:

1) γ – полуокружность $|z-a| = \rho$, $0 \le \arg(z-a) \le \pi$, идущая из точки $z = a + \rho$;

2) γ – окружность $|z-a| = \rho$;

3) γ – граница квадрата с центром в точке $z = a$ и со сторонами, параллельными осям координат.

6.13. Пусть функция $f(z)$ интегрируема вдоль спрямляемой кривой γ. Доказать, что справедливо неравенство

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |\,f(z)\,|\,|\,dz\,|.$$

6.14. Пусть функция $f(z)$ интегрируема вдоль спрямляемой кривой γ. Доказать, что справедливо неравенство

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\,|\,\gamma\,|,$$

где $|\,\gamma\,|$ – длина кривой γ и $|f(z)| \le M$ для $z \in \gamma$.

6.15. Доказать неравенства:

1) $|\,e^{-z} - 1\,| \le |z|,\ \mathrm{Re}\,z \ge 0;$

2) $\dfrac{1}{4}\,|z| \le |e^z - 1| \le \dfrac{7}{4}\,|z|,\ |z| < 1;$

3) $|e^z - 1| \le e^{|z|} - 1 \le |z|\,e^{|z|},\ z$ – любое.

6.16. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в полуплоскости $\mathrm{Im}\,z \ge 0$ и удовлетворяет неравенству $|f(z)| \le M\,|z|^m$, $\mathrm{Im}\,z \ge 0$.

Доказать, что

$$\left| \int_\gamma f(z)e^{iz}dz \right| \le \pi M R^m,$$

где γ – полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \ge 0$.

6.17. Доказать интегральную теорему Коши для односвязной области.

6.18. Доказать теорему Коши для многосвязной области.

6.19. Пусть ограниченная область D имеет границу γ – замкнутую жорданову спрямляемую кривую. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна на $\overline{D} = D \cup \gamma$, то $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

6.20. Пусть D – односвязная область комплексной плоскости **C** и функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых существуют пределы $\lim\limits_{z \to a_j} (z-a_j) f(z) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказать, что для любой замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, не проходящей через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, интеграл $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

6.21. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $z = z_0$. Доказать, что

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

6.22. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области $0 < |z - z_0| < R$ и $M(z) = \max\limits_{|z-z_0|=r<R} |f(z)|$. Доказать, что если $\lim\limits_{r \to 0} rM(r) = 0$, то

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz = 0.$$

6.23. Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $|z - z_0| > r_0$ и $\lim\limits_{r \to \infty} rM(r) = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{r \to \infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz = 0$.

6.24. Показать, что

$$\int_{\gamma}(z-a)^n\,dz=\begin{cases}0, \quad a\notin\gamma, n\neq-1, n\in\mathbf{Z},\\ 2\pi i,\ a\in D_{\gamma}, n=-1,\\ 0, \quad a\notin\overline{D_{\gamma}}, n=-1,\end{cases}$$

где γ – контур, ограничивающий конечную область D_γ, $\overline{D}_\gamma$ – замыкание D_γ.

6.25. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, γ – замкнутая кривая $\gamma \in D$. Доказать, что

$$\int_{\gamma}\overline{f(z)}\,\overline{dz}=0.$$

6.26. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в окрестности начала координат. Доказать, что

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi=2\pi f(0).$$

6.27. Пусть функция $f(z)$ аналитична в конечной выпуклой области D и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f(z)\geq M>0$, $z\in D$. Доказать, что для любых точек $z_1, z_2 \in D$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\right|\geq M\mid z_2-z_1\mid.$$

Будет ли верным данное неравенство, если условие аналитичности функции заменить на условие непрерывности?

6.28. Пусть функция $f(z)$ аналитична в конечной выпуклой области D и удовлетворяет условию $\operatorname{Im} f(z)\geq M>0$, $z\in D$. Доказать, что для любых точек $z_1, z_2 \in D$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\right|\geq M\mid z_2-z_1\mid.$$

Будет ли верным данное неравенство, если условие аналитичности функции заменить на условие непрерывности?

6.29. Пусть функция $f(z)$ аналитична в выпуклой области D и $|f(z)| \geq M$, $z \in D$. Следует ли отсюда, что для любых $z_1, z_2 \in D$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \right| \geq M\,|\,z_2 - z_1\,|\,.$$

6.30. Пусть функция $f(z, \xi)$ аналитична по $z \in D$ при $\xi \in \gamma$ и непрерывна по $\xi \in \gamma$ при $z \in D$, где γ – жорданова, кусочно-гладкая кривая. Доказать, что функция

$$F(z) = \int_\gamma f(z,\xi)\,d\xi$$

аналитична в области D и

$$F'(z) = \int_\gamma f'_z(z,\xi)\,d\xi.$$

6.31. Доказать, что если $|f(z, t)| \leq F(t)$ для всех $z \in D$ и интеграл $\int_a^{+\infty} F(t)\,dt$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(z,t)\,dt$ сходится равномерно по $z \in D$ при условии, что интеграл $\int_a^A f(z,t)\,dt$ существует при любом $A > a$.

6.32. Пусть функция $f(z, t)$ аналитична по $z \in D$ при любом $t \in [a, +\infty)$ и непрерывна по $t \in [a, +\infty)$ при любом $z \in D$. Доказать, что если интеграл $\int_a^{+\infty} f(z,t)\,dt$ сходится равномерно в области D, то функция $F(z) = \int_a^{+\infty} f(z,t)\,dt$ аналитична в области D, $F'(z) = \int_a^{+\infty} f'_z(z,t)\,dt$ и этот интеграл сходится равномерно в области D.

6.33. Найти множества, на которых равномерно сходятся следующие интегралы:

1) $F(z) = \int_0^{\infty} e^{(z-1)\ln t} e^{-t}\,dt;$ 2) $\int_0^{+\infty} \sin t \,/\, e^{z\ln t}\,dt;$

3) $\int_0^{+\infty} \cos t / e^{z \ln t} dt$; 4) $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t} dt,\ c \neq 0$; 5 $\int_c^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t} dt,\ c \neq 0$.

6.34. Доказать аналитичность следующих функций в указанных областях:

1) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-tz}}{1+t^2} dt, \operatorname{Re} z > 0$;

2) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(1+e^{tz})}, \operatorname{Re} z > 0$;

3) $\int_0^{1} \frac{\cos tz}{z+t} dt, z \notin [0,1]$;

4) $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2+z^2} dt, \operatorname{Re} z > 0$.

6.35. Для интеграла Лапласа $\int_0^{+\infty} e^{tz} f(t)\, dt$, где функция $f(t)$ интегрируема на $[0, a]$ для любого $a > 0$, доказать:

1) если интеграл сходится в точке $z = z_0$, то он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, равномерно сходится в угле

$$|\arg(z - z_0| \leq \theta < \pi/2;$$

2) если интеграл сходится абсолютно в точке $z = z_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$;

3) если $\overline{\lim_{t\to+\infty}} \ln |f(t)| / t = \alpha$, то интеграл сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ и равномерно во всякой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \alpha + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$;

4) если $\underline{\lim}_{t\to\infty} \ln |f(t)| / t = \beta$, то интеграл не сходится абсолютно ни в одной точке полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$.

6.36. Найти области аналитичности следующих функций:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\, dt}{t+z}, |f(t)| \leq M(1+t)^{-\alpha}, \alpha > 0$;

2) $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)\, dt}{t^2 - z^2}, |f(t)| \leq M$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{e^t + z}, |f(t)| \le \frac{M}{1+t^2}$; 4) $\int_{\arg t=\alpha} \frac{e^{-t}}{t+z}\,dt$;

5) $\int_\gamma \frac{\cos t\,dt}{e^t - z}, \gamma = \{t : 0 \le |t| \le \pi, \arg t = \pi/2\}$.

6.37. Для интеграла Лапласа (см. 6.35) найти область существования и область аналитичности, если функция $f(z)$ есть:

1) 1; 2) $t^n, n \in \mathrm{N}$; 3) e^{at}; 4) $\sin \omega t$;

5) $\cos \omega t$; 6) $\operatorname{sh} \omega t$; 7) $\operatorname{ch} \omega t$; 8) $e^{at} \sin \omega t$;

9) $e^{at} \cos \omega t$, $\omega \ne 0$ – действительное число.

6.38. Найти первообразные для функций:

1) $\sin az$; 2) $\cos az$; 3) e^{az}; 4) $\operatorname{ch} az$; 5) $\operatorname{sh} az$;

6) $e^{az} \sin bz$; 7) $e^{az} \cos bz$; 8) $e^{az} \operatorname{ch} bz$; 9) $e^{az} \operatorname{sh} bz$ $(a \ne 0,\ b \ne 0,\ a \ne b)$.

6.39. Доказать, что необходимым и достаточным условием существования первообразной для непрерывной функции $f(z)$ в области D является равенство нулю интеграла от функции $f(z)$ по любому замкнутому жорданову спрямляемому контуру $\gamma \in D$.

6.40. Доказать, что следующие функции не имеют первообразных в указанных областях:

1) $z^{-1}, 0 < |z| < \infty$; 2) $z^{-1} - (z-1)^{-1}, 0 < |z| < 1$;

3) $(\sin z)^{-1}, 0 < |z| < \pi$; 4) $(\cos z - 1)^{-1}, 0 < |z| < 2\pi$;

5) $P(z)/Q(z)$ в области $|z| < R$, $|z - a_j| > r_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих множителей, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – все нули $Q(z)$, причем области $|z - a_j| < r_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат области $|z| < R$.

6.41. Пусть функция $f(z, t)$ аналитична в односвязной области, содержащей точку $z = \infty$. Доказать, что функция имеет в указанной области первообразную тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$.

6.42. Пусть D – односвязная область, не содержащая точку $z = 0$. Доказать, что функция $\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ является первообразной для функции z^{-1} в области D.

6.43. Доказать, что если путь интегрирования не проходит через начало координат, то $\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln r + i\varphi + i2k\pi,\ z = re^{i\varphi}$, φ – главное значение аргумента, k – целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат.

6.44. Пусть D – односвязная область, не содержащая точек $z = \pm i$. Доказать, что в области D функция $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ является первообразной для функции $f(z) = 1 / (1 + z^2)$.

6.45. Показать, что если путь не проходит через точку $\mp i$, то

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где число k зависит от вида пути.

6.46. Пусть функция $f(z)$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Im} z < a$ и в этой области $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Доказать, что из существования интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ следует также существование интеграла $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z)\,dz$, $\alpha \in (-a, a)$ и интеграл не зависит от α.

6.47. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $|\arg z| < a$ и $\lim\limits_{z\to 0} z\,f(z) = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$, $|\arg z| < a$. Доказать, что из существования интеграла $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ следует существование интеграла $\int_{\arg z=\alpha} f(z)\,dz$, $\alpha \in (-a, a)$, и интеграл не зависит от α.

6.48. Доказать *лемму Жордана*:

1) если $f(z)$ – непрерывная функция в области $|z| \geq R_0$, $\operatorname{Im} z \geq a$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то для любого $m > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0$, где γ_R – дуга окружности $|z| = R$, лежащая в рассматриваемой области;

2) Если $f(z)$ – непрерывная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \sigma$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то для любого $t < 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{zt} f(z)\,dz = 0,$$

где γ_R – дуга окружности $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \geq \sigma$.

6.49. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$, используя интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

6.50. Вычислить *интегралы Френеля*:

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx,\ \int_0^{+\infty}\sin x^2 dx.$$

6.51. Вычислить *интеграл Дирихле*: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

6.52. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n+1} x}{x}\,dx, n\in \mathbf{N}$.

6.53. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2n}\alpha x - \sin^{2n}\beta x}{x}\,dx,\ \alpha\beta \neq 0.$$

6.54. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx,\ n\in \mathbf{N}.$$

6.55. Показать, что при $a > 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-a}.$$

6.56. Показать, что при $a > 0$, $b > 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi(b-a).$$

6.57. Показать, что при $a > 0$, $b > 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y}\,dy = \ln\frac{b}{a}.$$

6.58. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n}\alpha x - \cos^{2n}\beta x}{x}\,dx,\ \alpha\beta \neq 0.$$

6.59. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n+1}\alpha x - \cos^{2n+1}\beta x}{x}\,dx,\ \alpha\beta \neq 0.$$

6.60. Показать, что при $b > 0$, $m \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + b^2)^2}\cos mx\,dx = \frac{\pi e^{-mb}}{4b^3}\{3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)\}.$$

6.61. Показать, что при $a > 0$, $k \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ka}.$$

6.62. Показать, что при $a > 0$, $m > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m + \frac{2}{a}\right).$$

6.63. Пусть Re z > 0. Показать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t}\,dt = \ln z.$$

6.64. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}\,dx.$$

6.65. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{dx}{x}.$$

6.66. Преобразованием Фурье $\widehat{f}(\xi)$ функции $f(x)$ называется интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx := \widehat{f}(\xi).$$

Доказать, что преобразованием Фурье функции

$$f(x) = e^{-ax^2}, \ a > 0,$$

является функция

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a}.$$

Сравнить с примером 6.49.

Глава 7
ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

Пусть D – ограниченная область на $\mathbf{C}$ с кусочно-гладкой границей Γ (D может быть и многосвязной областью), функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Если область D является односвязной и замкнутый контур Жордана γ содержится в D, то также справедлива формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z \in \operatorname{int}\gamma, \\ 0, & z \in \notin \operatorname{int}\gamma \end{cases}$$

при условии, что функция $f(z)$ аналитична в области D.

Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая Жордана (Γ – не обязательно замкнутая кривая) и заданная на Γ функция $f(\xi)$ является непрерывной. Для любого $z \notin \Gamma$ определим функцию $F(z)$ по формуле

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z},$$

являющуюся однозначной функцией. Эту функцию называют *интегралом типа Коши.* Интегральная формула Коши для аналитической функции является частным случаем интеграла типа Коши. Справедлива следующая теорема.

Теорема. В любой точке $z \notin \Gamma$ интеграл типа Коши является аналитической функцией, которая имеет производные любого порядка и справедлива формула

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Из этой теоремы следует, что аналитическая в области D функция является бесконечно дифференцируемой в области D, и справедлива формула

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+1}},$$

где z – произвольная точка в области D и замкнутый контур γ таков, что $\operatorname{int}\gamma\subset D$ и $z\in\operatorname{int}\gamma$.

Бесконечная дифференцируемость аналитической функции позволяет доказать теорему Морера, являющуюся в некотором смысле обращением теоремы Коши.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D\subset\mathbf{C}$ и для любого замкнутого контура Жордана $\gamma\subset D$

$$\oint_{\gamma} f(\xi)\,d\xi=0.$$

Тогда функция $f(z)$ аналитична в D.

Интегральная формула Коши позволяет получить еще ряд важных следствий.

Формула среднего значения. Если функция $f(z)$ аналитична в открытом круге $\{z\colon |z-z_0|<R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{z\colon |z-z_0|\le R\}$, то справедлива формула

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{R}e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Теорема Лиувилля. Если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|f(z)|\le M\,|z|^{\alpha}$, то $f(z)$ есть многочлен степени не выше $[\alpha]$.

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной области $\mathbf{C}$ и ограничена, то она является константой.

Принцип максимума модуля аналитической функции. Модуль аналитической в области $D\subset\mathbf{C}$ функции $f(z)$, отличной от константы, ни в одной точке этой области не может принимать значения $\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$. Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то функция $|f(z)|$ достигает своего максимума только на границе ∂D этой области.

Если не являющаяся константой функция $f(z)$, аналитическая в области D, всюду в D удовлетворяет условию $f(z) \neq 0$, то ни в одной точке из D функция $|f(z)|$ не может принимать значения $\inf\limits_{z\in D} |f(z)|$.

Принцип Фрагмена–Линделефа. Если область
$$D = \{z \in \mathbf{C} : \varphi_0 < \arg(z - z_0) < \varphi_0 + \pi / \delta_1\}$$
есть угол раствора π / δ_1 с вершиной в точке z_0 на комплексной плоскости **C** и заданная в области D функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) на границе ∂D области D всюду функция $f(z)$ имеет конечные предельные значения изнутри D;

2) существует константа $M > 0$, такая, что $|f(\xi)| < M$ для всех $\xi \subset \partial D$;

3) для любого $z \in D$ имеет место неравенство
$$|f(z)| < e^{|z-z_0|^{\delta}}, \; 0 < \delta < \delta_1,$$
то $|f(z)| < M$ всюду в D.

Интеграл типа Коши можно определить и в случае, когда точка z принадлежит кривой интегрирования. Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая Жордана, а $f(\xi)$ – заданная на Γ непрерывная функция. Пусть, далее, точка $z_0 \in \Gamma$, а Γ_ε – часть кривой Γ, лежащая вне круга $\{z : \; |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, где ε – достаточно малое положительное число. Тогда определен интеграл
$$F_\varepsilon(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0}.$$
Если существует $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} F_\varepsilon(z_0)$, то этот предел называется *интегралом в смысле главного значения по Коши* или *сингулярным интегралом Коши*, который обозначают обычным символом интеграла
$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0}.$$

Для существования интеграла в смысле главного значения по Коши при любом $z \in \Gamma$ достаточно потребовать от функции $f(\xi)$, чтобы она удовлетворяла условию Гёльдера всюду на Γ с некоторым показателем α, $0<\alpha\le 1$, т. е. чтобы для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$ было справедливо неравенство

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\le M\,|\xi_1-\xi_2|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1,$$

где M – некоторая положительная константа, не зависящая от ξ_1 и ξ_2.

Таким образом, для аналитической в односвязной области D функции $f(z)$ интегральная формула Коши окончательно имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\begin{cases} f(z), & z\in \operatorname{int}\gamma,\\ \frac{1}{2}f(z), & z\in\gamma,\\ 0, & z\notin \overline{\operatorname{int}\gamma},\end{cases}$$

где γ – кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, целиком лежащая в D.

Функция $F(z)$, аналитическая в области $\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, принадлежит пространству Харди $H^p(\operatorname{Im} z>0)$, $0<p<\infty$, если

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^p\,dx<\infty.$$

Пространство Харди $H^{\infty}(\operatorname{Im} z>0)$ определяется как множество функций, аналитических и ограниченных в области $\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$. Аналогично определяются пространства Харди H^p и для области $\{z:\ \operatorname{Im} z<0\}$.

Если функция $F(z)\in H^p(\operatorname{Im} z>0)$, $0<p<\infty$, то для каждого $y>0$ справедливо неравенство

$$|F(x+iy)|\le\frac{c}{y^{1/p}},$$

где константа c зависит только от функции $F(z)$ и числа p. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $F(z)\in H^p(\operatorname{Im} z>0)$, $1\le p\le\infty$. Тогда при почти всех $t\in\mathbf{R}$ существует $\lim\limits_{z\to t,\,\operatorname{Im} z>0} F(z)=F(t)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^p\,dt<\infty\quad(\sup_t|F(t)|<\infty \text{ при } p=\infty).$$

Кроме того, для функции $F(z)$ справедливо представление

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} yF(t)\,dt\,/\,((x-t)^2+y^2), \quad z=x+iy,\ y>0.$$

Это есть формула Пуассона для полуплоскости.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы. При $p=\infty$ предположим дополнительно, что $\lim F(z)=0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z>0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)\,dt}{t-z}=F(z), \quad \operatorname{Im} z>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)\,dt}{t-\overline{z}}=0, \quad \operatorname{Im} z>0.$$

Эти формулы являются обобщением интегральной формулы Коши для верхней полуплоскости для функций из пространства Харди H^p.

Функция $F(z)$, аналитическая в единичном круге $\{z: |z|<1\}$, принадлежит пространству Харди $H^p(|z|<1)$, $0<p\le\infty$, если

$$\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^p\,d\theta<\infty, \quad 0<p<\infty,$$

$$\sup_{|z|<1}|F(z)|<\infty, \quad p=\infty.$$

Пространства H^p для полуплоскости и круга связаны между собой следующим образом. Пусть $w=(i-z)/(i+z)$, $\operatorname{Im} z>0$. Это значит, что $|w|<1$. Пусть также $f(w)\equiv F(z)$. Тогда справедлива

Теорема.

1) Пусть $1\le p\le\infty$. Функция $f(w)\in H^p(|w|<1)$ тогда и только тогда, когда функция

$$F(z)\,/\,(z+i)^{2/p}\in H^p(\operatorname{Im} z>0).$$

2) Пусть $1<p<\infty$. Если функция $F(z)\in H^p(\operatorname{Im} z>0)$, то функция $f(w)\in H^p(|w|<1)$.

7.1. Доказать интегральную формулу Коши.

7.2. Доказать теорему Морера.

7.3. Доказать, что

$$\oint_{|z|=1} e^{\bar{z}}\, dz = -2\pi i.$$

7.4. Вычислить интеграл

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$$

по замкнутой кривой γ, если:

1) точка $3i$ лежит внутри γ, а точка $-3i$ лежит вне γ;

2) точка $-3i$ лежит внутри γ, а точка $3i$ лежит вне γ;

3) точки $3i$ и $-3i$ лежат внутри γ.

7.5. Вычислить все значения интеграла

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z(z^2-1)}$$

по различным замкнутым кривым γ, не проходящим через точки $0, \pm 1$.

7.6. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы:

1) $\oint_{|z+i|=3} \frac{\sin z\, dz}{z+i}$; 2) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$; 3) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}$;

4) $\oint_{|z|=4} \frac{\cos z\, dz}{z^2-\pi^2}$; 5) $\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$;

6) $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, $|a|<r<|b|, n\in \mathbf{N}$;

7) $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z\, dz}{(z-i)^3}$; 8) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z\, dz}{z^4-1}$, $a>1$; 9) $\oint_{|z-a|=1} \frac{e^z z\, dz}{(z-a)^3}$.

7.7. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$$

в следующих случаях:

1) если контур γ не содержит внутри себя круг $\{z \in \mathbf{C}: |z| \leq a\}$;

2) если контур γ содержит внутри себя круг $\{z \in \mathbf{C}: |z| \le a\}$.

7.8. Вычислить интеграл

$$\oint_\gamma \frac{dz}{1+z^4},$$

где γ – эллипс: $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$, $z = x + iy$.

7.9. Доказать, что при $\eta > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\eta}{\eta^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\eta^2}}.$$

7.10. Вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-a^{-1})},$$

доказать, что при $0 < a < 1$ справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

7.11. Какое число различных значений может принимать интеграл

$$\oint_\gamma \frac{dz}{w_n(z)},$$

где $w_n(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_n)$, $z_k \ne z_j$ при $k \ne j$, и контур γ не проходит ни через одну из точек z_k? Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{j\ne i}^{n}(z_i - z_j)} = 0,\ n \ge 2.$$

7.12. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z \in \mathbf{C}: r < |z| < R\}$ и непрерывна в его замыкании,

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, |z| < R,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, |z| > r.$$

Доказать, что в этом кольце $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

7.13. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замыкании односвязной ограниченной области D с кусочно-гладкой границей γ, которая содержит внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви Ln z справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f'(\xi)\mathrm{Ln}\xi\, d\xi = f(z_0) - f(0),$$

где z_0 – начальная точка интегрирования по кривой γ.

7.14. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} z^2 \mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}dz$$

где $\mathrm{Ln}\, a = \ln a$ при $a > 0$, и контуром γ является:

1) окружность $\{z \in \mathbf{C}: |z| = 2\}$;

2) окружность $\{z \in \mathbf{C}: |z-1| = 1\}$ и начальная точка интегрирования $z_0 = 1 + i$.

7.15. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замыкании ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границей γ и $w_n(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_n)$, где $z_k \neq z_j$ при $k \neq j$ и $z_j \in D$. Доказать, что интеграл

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{w_n(\xi)}\cdot\frac{w_n(\xi) - w_n(z)}{\xi - z}d\xi,\ z \in D,$$

является алгебраическим многочленом степени не выше $n-1$, интерполирующим функцию $f(z)$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, т.е. $P(z_k) = f(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Этот многочлен носит название *интерполяционный многочлен Лагранжа*.

7.16. Доказать теорему Лиувилля.

7.17. Доказать следствие из теоремы Лиувилля, вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)},$$

где $|a| < R$, $|b| < R$, и оценив его при $R \to \infty$, $f \in A(\mathbf{C})$, $|f(z)| \leq M$.

7.18. Доказать, что если функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости и при $z \to \infty$ имеет место $f(z) = o(|z|)$, то функция $f(z)$ есть тождественная константа.

7.19. Доказать, что если функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости и при $z \to \infty$ имеет место

$f(z)=O(|z|^{\alpha})$, где $\alpha \geq 0$, то функция $f(z)$ есть полином степени не выше $[\alpha]$.

7.20. Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, ограничивающая односвязную область D. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична во внешности области D и существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\begin{cases}A-f(z), & z\notin\overline{D},\\ A, & z\in D.\end{cases}$$

Контур γ обходится в положительном направлении относительно области D. Эта формула называется *интегральной формулой Коши для неограниченной области.*

7.21. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во внешности односвязной ограниченной области D с кусочно-гладкой границей γ и пусть $f(z) = o(z)$ при $z\to\infty$. Доказать, что справедлива формула (при условии, что $0\in D$):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi z-z^2}=\begin{cases}0, & z\in D,\\ \dfrac{f(z)}{z}, & z\notin\overline{D}.\end{cases}$$

Будет ли справедлива формула, если условие $f(z)=o(z)$ при $z\to\infty$ заменить на условие $|f(z)|\leq M$.

7.22. Доказать формулу среднего значения аналитической функции.

7.23. Доказать, что если формула среднего значения справедлива для непрерывной функции в любой окрестности каждой точки некоторой области, то эта функция является аналитической в указанной области.

7.24. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z:\ |z|<R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{z:|z|\leq R\}$. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{r\leq|z|\leq R} f(z)\,dx\,dy.$$

7.25. Доказать принцип максимума модуля аналитической функции.

7.26. Доказать, что принцип максимума справедлив для любой непрерывной однолистной в области $D \subset \mathbf{C}$ функции комплексного переменного z.

7.27. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области $D \subset \mathbf{C}$ и непрерывна вплоть до границы этой области. Доказать, что справедливо неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \le \frac{ML}{2\pi\rho^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $M = \max |f(z)|$, L – длина границы области D, а ρ – расстояние от точки $z \in D$ до границы этой области.

7.28. Доказать *лемму Шварца*: если аналитическая в круге $\{z \in \mathbf{C}\colon |z| < 1\}$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$ для $|z| < 1$, то справедливы следующие неравенства:

$$| f'(0) \le 1,\ | f(z) \le | z | \text{ для } |z| < 1,$$

причем если равенство $|f(z)| = |z|$ имеет место хотя бы в одной точке $z_0 \ne 0$, $|z_0| < 1$, или $|f'(0)| = 1$, то всюду в единичном круге справедливо $f(z) = e^{i\alpha} z$, где α – действительное число.

7.29. Пусть функция $f(z)$ непрерывно-дифференцируема в замыкании ограниченной области D, граница ∂D которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых Жордана; доказать, что тогда для каждой точки $z \in D$ справедливо равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)d\xi}{\varsigma - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}\frac{d\varsigma d\eta}{\xi - z},$$

где $\xi = \zeta + i\eta$.

7.30. Доказать справедливость равенства

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\varsigma|<1}\frac{\varsigma^n d\xi d\eta}{\varsigma - z} = z^{n-1}(1 - z\overline{z}),$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\{z\colon |z| < 1\}$.

7.31. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{z : |z - z_0| \le R\}$. Доказать справедливость *формул Шварца*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=R}\frac{\xi-2z_0+z}{(\xi-z_0)(\xi-z)}\operatorname{Re}f(\xi)d\xi+i\operatorname{Im}f(z_0),$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi-z_0|=R}\frac{\xi-2z_0+z}{(\xi-z_0)(\xi-z)}\operatorname{Im}f(\xi)d\xi+\operatorname{Re}f(z_0).$$

7.32. В предположениях задачи 7.31 доказать формулу Пуассона:

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}f(Re^{i\varphi})d\varphi,$$

где $z-z_0=re^{i\theta}$, $\xi-r_0=Re^{i\varphi}$.

7.33. Пусть последовательность аналитических в области $D\subset\mathbf{C}$ функций $\{f_n(z)\}$ обладает тем свойством, что в некоторой фиксированной точке $z_0\in D$ $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z_0)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Re}f_n(z)=0$ равномерно в области D. Доказать, что последовательность функций $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к нулю на любом компактном множестве из D.

7.34. Пусть функция $f(z)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\{z:\ \operatorname{Re}z>0\}$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\{z:\operatorname{Re}z\geq 0\}$. Доказать, что при $\operatorname{Re}z>0$ справедлива формула

$$f(z)=\frac{\operatorname{Re}z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(i\eta)\frac{d\eta}{(\operatorname{Re}z)^2+(\eta-\operatorname{Im}z)^2}.$$

7.35. Доказать формулу дифференцирования интеграла типа Коши.

7.36. Пусть Г – кусочно-гладкая кривая и пусть дополнение к Г состоит из конечного числа областей. Доказать, что в каждой из этих областей интеграл типа Коши является аналитической функцией. Привести пример, показывающий, что эти аналитические функции, вообще говоря, не являются аналитическим продолжением друг друга.

7.37. Пусть Г – кусочно-гладкая кривая Жордана. Доказать, что интеграл типа Коши есть аналитическая функция в точке $z=\infty$.

7.38. Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t непрерывна на всей числовой прямой и для любого $t\in\mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$|f(t)| \le c(1+|t|)^{-\alpha}, \ \alpha > 0, \ c > 0.$$

Доказать, что интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

определяет две функции $F_+(z)$ и $F_-(z)$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости **C**.

7.39. Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t непрерывна при $t \ge 0$ и удовлетворяет неравенству из задачи 7.38. Доказать, что интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

является функцией, аналитической во всей комплексной плоскости с разрезом по полуоси $[0, +\infty)$.

7.40. Пусть функция $f(\xi)$ аналитична в полосе $\{\xi \in \mathbf{C}: \ -a \le \le \operatorname{Im}\xi \le 0, \ a>0\}$ и при $-a \le \operatorname{Im}\xi \le 0$ удовлетворяет условию

$$|f(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, c > 0.$$

Доказать, что интеграла типа Коши $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$ допускает аналитическое продолжение из области $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ в область $\{z : \operatorname{Im} z > -a\}$ и это продолжение $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ может быть задано формулой

$$F_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \ \operatorname{Im} z > -a.$$

7.41. Пусть

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=2} \frac{dt}{(t^2+1)(t-z)}, \ |z| < 2.$$

Доказать, что функция $F(z)$ аналитична в круге $\{z : |z| < 2\}$ и может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость.

7.42. Пусть $F(z)$ – функция, определенная вне замыкания области $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ равенством

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{e^{e^t}\,dt}{t-z},\quad z\notin\overline{D}.$$

Доказать, что функцию $F(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость.

7.43. Доказать, что для функции $F(z)$ из задачи 7.42 имеют место асимптотические формулы:

1) $F(z)=-1/z,\ z\to\infty,\ z\notin\overline{D}$;

2) $F(z)=-1/z+e^{e^z}+O(1/z^2),\ z\to\infty,\ z\in D.$

7.44. Пусть $F(z)$ – функция, определенная вне замыкания области $D=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>1,\ |\arg z|<\pi/\rho,\ \rho>1\}$ равенством

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{e^{t^\rho}\,dt}{t-z},\quad z\notin\overline{D}.$$

Доказать, что функцию $F(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость ($t^\rho>0$ при $t>0$).

7.45. Доказать, что для функции $F(z)$ из задачи 7.44 имеют место асимптотические формулы:

1) $F(z)=-\dfrac{1}{z}\Gamma\left(\dfrac{1}{\rho}+1\right)\sin\dfrac{\pi}{\rho},\quad z\to\infty,\ z\notin\overline{D}$;

2) $F(z)=-\dfrac{1}{z}\Gamma\left(\dfrac{1}{\rho}+1\right)\sin\dfrac{\pi}{\rho}-e^{z^\rho}+O\left(\dfrac{1}{z^2}\right),\ z\to\infty,\ z\in D.$

7.46. Доказать, что если функция $f(t)$ удовлетворяет на кривой Γ условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha\le 1$ (см. введение, стр. 85, 86), то для любой точки $z_0\in\Gamma$ существует интеграл в смысле главного значения по Коши

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z_0},$$

который, если z_0 не является концом кривой Γ, может быть выражен через обычный интеграл

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi-z_0}\,d\xi+\frac{f(z_0)}{2}+\frac{f(z_0)}{2\pi i}\mathrm{Ln}\frac{b-z_0}{a-z_0},$$

где a и b – концы кривой Г, а однозначная ветвь Ln выбирается так, чтобы в случае замкнутой кривой Г ($a = b$) член с логарифмом исчезал.

7.47. Пусть функция $F(z)$ – интеграл типа Коши по замкнутой кривой Г, функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и точка $z_0 \in \Gamma$. Доказать, что существуют пределы

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in D}} F(z) = F^+(z_0), \quad \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\notin D}} F(z) = F^-(z_0),$$

где D – область, ограниченная кривой Г.

7.48. В условиях задачи 7.47 доказать *формулы Сохоцкого–Племеля:*

$$F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} + \frac{f(z_0)}{2},$$

$$F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} - \frac{f(z_0)}{2},$$

$$F^+(z_0) + F^-(z_0) = \frac{1}{\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0},$$

7.49. Доказать, что для аналитической в односвязной области D функции $f(z)$ справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z\in \operatorname{int}\gamma, \\ \frac{1}{2}f(z), & z\in \gamma, \\ 0, & z\notin \overline{\operatorname{int}\gamma} \end{cases}$$

для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой γ, целиком лежащей в D.

7.50. Пусть функция $F(z)$ определена следующим равенством:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x - z}.$$

Найти $F(z)$ при $z \notin [-1, 1]$, предельные значения $F^{\pm}(\xi)$, $\xi \in [-1, 1]$, главное значение $F(z)$ на $[-1, 1]$ в смысле Коши.

7.51. Пусть $0 < x < 1$. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{t - x} = \frac{1}{2} + x + x^2 \ln\frac{1-x}{x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

7.52. Доказать равенства:

1) $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda} \frac{dt}{t-z} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\lambda}\right]$, $z \notin [0, 1]$, $0 < \lambda < 1$;

2) $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda} \frac{dt}{t-z} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\lambda} \cos\lambda\pi\right]$,

$z \in [0, 1)$, $0 < \lambda < 1$.

7.53. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{t^2+3}{t-x}\, dt$, $\quad -1 < x < 1$;

2) $\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t} \cdot \frac{dt}{t-z}$, $\quad z \notin [0, 1]$; $\quad$ 3) $\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t} \cdot \frac{dt}{t-z}$, $\quad z \in (0, 1)$.

7.54. Выяснить поведение интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \ln\frac{\xi}{\xi - 1} \cdot \frac{d\xi}{\xi - z}$$

вблизи точек $z = -R$ и $z = R$, если $\gamma = \{z\colon |z| = R, \operatorname{Im} z > 0, R > 1\}$.

7.55. Доказать принцип Фрагмена–Линделефа (см. с. 85).

7.56. Пусть алгебраический многочлен $P(z)$ комплексного переменного z удовлетворяет неравенствам:

1) $\forall x \in R\colon |P(x)| \geq 1$; $\quad$ 2) $\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|P(x)|}{1+x^2} dx \leq K$.

Доказать, что для любого комплексного z справедливо неравенство

$$|P(z)| \leq e^{K(|z|+2)}.$$

7.57. Пусть алгебраический многочлен $P(z)$ комплексного переменного z удовлетворяет условиям:

1) для любого действительного x справедливо неравенство $1 \le |P(x)| \le H(x)$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H(x)}{1+x^2}\, dx < \infty$.

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M > 0$, такое, что для любого $z \in \mathbf{C}$ имеет место: $|P(z)| \le Me^{\varepsilon|z|}$.

7.58. Пусть дана функция $F(z) \in H^p(\operatorname{Im} z > 0)$, $1 \le p \le \infty$, и пусть $h > 0$. Доказать, что справедлива формула

$$F(z+ih) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(t+ih)dt}{|z-t|^2},\ z = x+iy, y > 0.$$

7.59. Пусть дана функция $F(z) \in H^p(\operatorname{Im} z > 0)$, $0 < p < \infty$. Доказать, что для каждого h справедливо неравенство

$$|F(z+ih)|^p \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y|F(t+ih)|^p\, dt}{|z-t|^2},\ z = x+iy, y > 0.$$

7.60. Пусть функция $F(z) \in H^1(\operatorname{Im} z > 0)$. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt = 0, \text{ где } F(t) = \lim_{z \to t, \operatorname{Im} z > 0} F(z),\ t \in R.$$

7.61. Доказать интегральную формулу Коши для функции $F(z) \in H^p(\operatorname{Im} z > 0)$, $1 \le p \le \infty$, для верхней полуплоскости.

7.62. Пусть функция $F(z) \in H^p(\operatorname{Im} z > 0)$, $1 \le p \le \infty$. Доказать, что функция $f(w) \equiv F(z)$, $w = (i-z)/(i+z)$, принадлежит $H^p(|w| < 1)$. Показать, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

7.63. Доказать критерий принадлежности пространству H^p, $1 \le p \le \infty$, для круга и для полуплоскости.

7.64. Пусть функция $F(z) \in H^1(\operatorname{Im} z > 0)$. Доказать, что для любого $\lambda \ge 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt = 0.$$

7.65. Пусть функция $F(z) \in H^{p}(\operatorname{Im} z > 0)$, $1 < p \leq 2$. Доказать, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt = 0.$$

7.66. Доказать, что если функция $\Phi(\lambda)$, определенная для всех $\lambda \in \mathbf{R}$, тождественно равна нулю при $\lambda \geq 0$, непрерывна и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty,$$

то существует функция $F(z) \in H^2(\operatorname{Im} z > 0)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F(t)\, dt = \Phi(\lambda),$$

где $F(t) = \lim F(z)$ при $z \to t$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Глава 8
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, где $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел, называется *степенным рядом* с центром в точке z_0.

Первая теорема Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно в круге $\{z \in \mathbf{C}: |z-z_0| < |z_1-z_0|\}$.

Величина $R = (\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Теорема Коши–Адамара. Пусть $0 < R < \infty$; тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

сходится абсолютно в круге $\{z: |z-z_0| < R\}$ и расходится вне этого круга, т. е. $\{z: |z-z_0| > R\}$. При $R = 0$ ряд сходится только в точке z_0, а при $R = +\infty$ ряд сходится во всей комплексной плоскости.

Круг $\{z: |z-z_0| < R\}$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. Степенной ряд сходится равномерно на любом компакте, принадлежащем кругу сходимости. В круге сходимости $\{z: |z-z_0| < R\}$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ его сумма является аналитической функцией, при этом $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, |z-z_0| < R.$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* для функции $f(z)$ *в окрестности точки* z_0.

Если функция аналитична в круге $\{z: |z-z_0| < R\}$, то в этом круге функцию единственным образом можно разложить в ряд Тейлора с центром в точке z_0.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки (в окрестности ∞), если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является рядом Тейлора для функции $f(z^{-1})$ в окрестности $z_0 = 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и точка $z_0 \in D$. Тогда для всех $z \in D$ и таких, что $|z - z_0| < \rho(z_0, \partial D)$, справедливо разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n,$$

где ∂D – граница области D, $\rho(z_0, \partial D) = \inf\limits_{\xi \in \partial D} |z_0 - \xi|$ – расстояние от точки z_0 до границы ∂D.

Говорят, что путь γ некасателен к окружности в точке α, если в окрестности α путь γ может быть заключен в угол, меньший π, и с вершиной в точке α, биссектриса которого проходит по радиусу $O\alpha$.

Вторая теорема Абеля. Пусть α – точка на окружности круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и пусть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$. Тогда $\lim\limits_{z \to \alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$ при условии, что z стремится к α по любому пути γ, расположенному внутри круга сходимости и не касательному к окружности в точке $z = \alpha$.

Теорема единственности. Может существовать самое большее одна функция $f(z)$, аналитическая в области D, принимающая заданные значения на каком-либо множестве точек $E \in D$, обладающем по крайней мере одной предельной точкой $z_0 \in D$.

Пусть $A \in \mathbf{C}$ – произвольное комплексное число. Назовем A-точками функции $f(z)$, аналитической в области D, корни уравнения $f(z) = A$. Любой компакт в D может содержать лишь конечное число A-точек аналитической функции $f(z)$ в области D.

Натуральное число k называется *порядком* или *кратностью* *A-точки* z_0, если в окрестности точки z_0 имеет место разложение

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \left\{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+!)!} + \ldots\right\}, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Если $k = 1$, то A-точка называется *простой*.

Принцип максимума модуля. Модуль функции, аналитической в области, ни в какой точке этой области не может достигать своего максимума, если функция не является тождественно постоянной.

Теорема. Если аналитическая функция отлична от константы в области, то верхняя грань модуля функции не может достигаться ни в одной точке этой области.

Теорема. Модуль аналитической функции в области D и непрерывной в $\overline{D}$ достигает своего наибольшего значения в граничной точке области.

Теорема Лиувилля. Если функция аналитична и ограничена во всей комплексной плоскости **C**, то она является тождественно постоянной.

Лемма Шварца. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z\colon |z| < R\}$ и $f(0) = 0$. Если в этом круге $|f(z)| \le M$, то $|f'(0)| \le MR^{-1}$ и $|f(z)| \le MR^{-1}|z|$. Равенство в какой-либо точке $z\colon 0 < |z| < R$, может достигаться в том и только в том случае, если $f(z) = MR^{-1} e^{i\alpha} z$, α – действительное число.

Первая теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из аналитических в области D функций, сходится равномерно внутри D, то $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ есть аналитическая функция в D, при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно внутри области D и

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), k = 1, 2, ..., z \in D.$$

Вторая теорема Вейерштрасса. Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ и аналитичны в области D, то из равномерной сходимости ряда на границе области D следует равномерная сходимость ряда на $\overline{D}$.

Теорема. Из последовательности аналитических в области D функций $\{f_n(z)\}$, образующей семейство функций, ограниченных внутри D, можно извлечь равномерно сходящуюся внутри D подпоследовательность $\{f_{k_n}(z)\}$.

Теорема Витали. Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ образует семейство аналитических в области D функций, ограниченное внутри D, и пусть множество $Z \subset D$ – счетное множество, имеющее предельную точку в D. Если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве Z, то она равномерно сходится внутри области D.

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в некотором круге $K = \{z: |z - z_0| < R\}$. Такую функцию назовем *элементом* (элемент аналитической функции). Точки, лежащие на окружности $\Gamma = \{z: |z| = R\}$, будем подразделять на два класса:

1) точки $\zeta \in \Gamma$, обладающие окрестностью $U_\zeta = \{z: |z - \zeta| < \rho\}$, в которой существует некоторая аналитическая функция $f_\zeta(z)$, совпадающая с $f(z)$ в общей части кругов K и U_ζ, назовем *правильными* для данного элемента;

2) точки $\zeta \in \Gamma$, не обладающие такой окрестностью, назовем *особыми* точками элемента.

Из определения правильной точки вытекает, что если $\zeta_0 \in \Gamma$ – правильная точка, то и все точки дуги окружности Γ, находящейся внутри соответствующей окрестности U_{ζ_0}, также являются правильными. Заметим, что каждая точка $z_0 \in K$ является правильной, поэтому все точки круга K будем также называть правильными точками элемента $f(z)$.

8.1. Доказать, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}|$, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}|$.

8.2. Определить радиус сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\ln n} z^n$;

7) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} 2_n z^{n!}$; 9) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha^n) z^n$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n + \alpha^n)^n}{n!} z^n$.

8.3. Исследовать поведение ряда на границе круга сходимости:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^a z^n,\ a \in \mathbf{R}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{n!}}{n^2}$.

8.4. Доказать первую теорему Абеля.

8.5. Пусть $\left|\dfrac{a_n}{a_{n1}}\right| \ge R\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right), n \ge n_0, \alpha > 1, R > 0$. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{z\colon |z| \le R\}$.

8.6. Известно, что радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ равны соответственно r_a и r_b. Что можно сказать о радиусах сходимости рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}z^n, b_n \ne 0$?

8.7. Просуммировать следующие ряды:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1}z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-1}z^{2n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1}z^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2^n}}{n^2}$.

8.8. Доказать, что требование абсолютной сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ в одной граничной точке его круга сходимости $\{z\colon |z| < R\}$ влечет за собой абсолютную и равномерную сходимость этого ряда в замкнутом круге $\{z\colon |z| \le R\}$.

8.9. Пусть $\{a_n\}$ – монотонно стремящаяся к нулю последовательность, радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен 1. Доказать, что тогда ряд сходится всюду на окружности $\{z\colon |z| = 1\}$, за исключением, быть может, точки $z = 1$.

8.10. Доказать вторую теорему Абеля.

8.11. Пользуясь второй теоремой Абеля, доказать равенства:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|, 0 < \varphi \le \pi$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\varphi}{n} = \dfrac{\pi-\varphi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}, 0 < \varphi < \pi;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, |\varphi| < \pi.$

8.12. Привести пример расходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, для которого существует $\lim\limits_{z \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

8.13. Доказать *теорему Таубера*: пусть радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен 1 и пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; если $\lim\limits_{z \to 1-0} f(z) = 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} n|a_n| = 0$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

8.14. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ заданные функции и найти радиус сходимости полученных рядов:

1) $(1-z)^{-2}$; 2) $(1+z)^{-3}$; 3) $(a^2+z^2)^{-1}, a \neq 0$; 4) $(1+z^2)^{-1}$;

5) $(1-z^2)^{-1}$; 6) $(1+z^3)^{-2}$; 7) $[(1-z^2)(4+z^2)]^{-1}$.

8.15. Разложить в ряд Тейлора в окрестности $z = \infty$ функции из предыдущей задачи и указать области сходимости полученных рядов.

8.16. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующие функции и найти радиус сходимости полученного ряда:

1) e^z; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$;

6) $\sin^2 z$; 7) $\cos^2 z$; 8) $e^z \cos z$; 9) $e^z \sin z$;

10) $\int_0^z e^{\xi^2} d\xi$; 11) $\int_0^z \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi$; 12) $\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi}$; 13) $\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$.

8.17. Разложить в ряды Тейлора по степеням $(z - z_0)$, $|z_0| > 1$, следующие функции и указать области сходимости этих рядов:

1) $(1-z)^{-2}$; 2) $(z^2-1)^{-1}$; 3) $(z^2+1)^{-1}$.

8.18. Найти радиус сходимости и указать область сходимости ряда Тейлора в окрестности $z = i$ для следующих функций:

1) $(z^3-1)^{-2}$; 2) $e^{z \sin z}$; 3) $\frac{z^2}{(1+z)^2}$;

4) $[(z-a)(z-b)]^{-1}$, $a \neq i, b \neq i, a \neq b$.

8.19. Доказать, что коэффициенты a_n разложения в ряд Тейлора функции $f(z) = 1/(1-z-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяют соотношению $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Найти a_n и радиус сходимости ряда. Числа a_n называются *числами Фибоначчи*.

8.20. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$.

а) Показать, что если при каком-либо r, $0 < r < R$, неравенство Коши переходит в равенство, то $f(z) = a_k z^k$.

б) Пусть в п. а) при некотором r, $0 < r < R$, выполняется интегральное равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \max_{|z|=r} |f(r)|^2.$$

Следует ли отсюда, что $f(z) = a_k z^k$, $k \in \mathbf{N}$?

8.21. Доказать, что если функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ограничена при $|z| < 1$, то $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ сходится.

8.22. Доказать, что если для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ сходится, то справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r,\varphi) - f(\rho,\varphi)|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (r^n - \rho^n)^2, \quad r, \rho < 1.$$

8.23. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z\colon |z| < 1\}$, $f(0) = 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится для $|z| < 1$ и представляет внутри указанного круга аналитическую функцию.

8.24. Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$ и $f(0) = 0$. Доказать, что если $f(z) = z + f(z^2)$, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

8.25. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в окрестности точки $z = 0$ и $g(z) = \dfrac{f(z)}{1 - az}$. Доказать, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, то $b_0 = a_0$, $b_{n+1} = \alpha\, b_n + a_{n+1}$.

8.26. Найти разложение в ряд Тейлора аналитических в окрестности точки $z = 0$ функций, удовлетворяющих условиям:

1) $f(0) = 1$, $f'(z) = f(z)$; 2) $f(0) = 0$, $(1 + z^2) f'(z) = 1$;

3) $f(0)=0, f'(0)=1, (1-z^2)f''(z)-zf'(z)=0$;

4) $f(0)=1, f'(0)=0, f''(z)+z^{-1}f'(z)+f(z)=0$.

Последнее уравнение называется *уравнением Бесселя*.

8.27. Доказать, что функциональное уравнение $f(z)=f(2z)$ имеет в классе аналитических функций в окрестности $z=0$ только решения, являющиеся тождественно постоянными.

8.28. Пусть Жорданова спрямляемая кривая γ есть граница односвязной ограниченной области D и функция $\varphi(t)$ непрерывна на γ. Доказать, что для равенства $\oint_\gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=0,\ z\notin \overline{D}$, необходимо и достаточно, чтобы $\oint_\gamma t^n\varphi(t)dt=0,\ n=0,1,2,\ldots$.

8.29. Пусть Жорданова спрямляемая кривая γ есть граница односвязной ограниченной области D, точка $z=0$ принадлежит D и функция $\varphi(t)$ непрерывна на γ. Доказать, что для равенства $\oint_\gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}dt=0,\ z\in D$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_\gamma t^n\varphi(t)dt=0,\ n=-1,-2,\ldots$$

Показать, что условие $0\in D$ нельзя отбросить.

8.30. Пусть функция $f(z)$ аналитична на комплексной плоскости **C** и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)|\le C|z|^\alpha,\ \alpha\ge 0,$$

где **C**, α – константы, не зависящие от z. Доказать, что $f(z)$ – многочлен степени $n\le[\alpha]$.

8.31. Доказать теорему Лиувилля.

8.32. Доказать, что если функция аналитична в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, то она есть константа.

8.33. Доказать принцип максимума модуля аналитической функции.

8.34. Доказать теорему: если аналитическая функция отлична от постоянной в области D, то верхняя грань модуля функции не может достигаться ни в одной точке области D.

8.35. Доказать теорему: модуль аналитической функции в области D и непрерывной в $\overline{D}$ достигает своего наибольшего значения в граничной точке этой области.

8.36. Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ аналитична в круге $\{z : |z| \le r\}$. Доказать, что функция $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ есть функция, аналитическая во всей конечной плоскости **C** и

$$|\psi^{(k)}(z)| \le Mr^{-k} e^{|z|/2}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где M – константа, не зависящая от z.

8.37. Доказать, что если аналитическая функция $f(z)$ в области D отлична от константы и $f(z) \ne 0$, $z \in D$, то $\inf_{z \in D} |f(z)|$ не достигается внутри области D.

8.38. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и пусть $\inf_{z \in D} |f(z)| = \mu > 0$. Доказать, что или $|f(z)| > \mu$ для каждой внутренней точки области D, или $f(z) = \mu e^{i\alpha}$, α – действительное число.

8.39. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна на $\overline{D}$. Доказать, что если $|f(z)|$ есть константа на ∂D, то функция $f(z)$ или есть константа в области D, или она обращается в нуль хотя бы в одной точке области D.

8.40. Доказать лемму Шварца.

8.41. Пусть в круге $\{z: |z| < 1\}$ функция $f(z)$ аналитична и $|f(z)| \le M$, $|z| < 1$. Доказать, что если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – нули функции $f(z)$, $|z_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$|f(z)| \le M \left| \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \overline{z}_2 z} \cdot \ldots \cdot \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z} \right|,$$

причем равенство может выполняться либо для всех точек круга $\{z: |z| < 1\}$, либо ни для одной.

8.42. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Доказать, что хотя бы в одной точке окружности $\{z : |z| = 1\}$ имеет место неравенство $|f(z)| > 1$ или равенство $f(z) = z^n$.

8.43. Пусть $P(z)$ – многочлен степени n и $M_r = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Доказать, что при $0 < r_1 < r_2$ справедливо неравенство

$$M_{r_1} r_1^{-n} \geq M_{r_2} r_2^{-n},$$

т. е. $M_r r^n$ – невозрастающая функция на $(0, +\infty)$.

8.44. Пусть $P(z)$ – многочлен степени n и для $z \in [-1, 1]$ имеем $|P(z)| \leq M$. Доказать, что для любой точки $z \notin [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$|P(z)| \leq M\,(a+b)^n,$$

a и b – полуоси эллипса с фокусами в точках 1, – 1, эллипс проходит через точку z.

8.45. Доказать, что точка z_0 есть нуль порядка m аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z) = (z - z_0)^m\, \varphi(z)$, $\varphi(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$.

8.46. Пусть точка z_0 есть нуль порядка n для функции $f(z)$ и нуль порядка m для функции $g(z)$. Чем является точка z_0 для следующих функций:

1) $f(z)\, g(z)$; 2) $f(z) \pm g(z)$; 3) $f(z) / g(z)$?

8.47. Найти порядок нуля z = 0 для функций:

1) $z \sin z$; 2) $z^2 (e^{z^2} - 1)$; 3) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$; 4) $6 \sin z^3 - z_3 (6 - z^6)$.

8.48. Определить порядок всех нулей для следующих функций:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{sh} z$; 4) $\operatorname{ch} z$; 5) $e^z - 1$; 6) $\sin z - 2$;
7) $(1 - \operatorname{ctg} z) / z$; 8) $(z^2 + 9) / z^4$; 9) $\sin (z^{-1})$; !0) $\cos (z^{-1})$;

11) $\sin\left(\dfrac{1}{\sin z^{-1}}\right)$; 12) $\sin\left(\dfrac{1}{\cos z^{-1}}\right)$.

8.49. Доказать теорему единственности.

8.50. Существует ли функция, аналитическая в окрестности точки z = 0 и принимающая в точках $z_n = n^{-1}$ следующие значения:

1) 0, 1, 0, 1, 0, 1, … ; 2) 0, 1/2, 0, 1/4, 0, 1/6, … ;
3) 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, … ; 4) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, … ;
5) $f(n^{-1}) = e^{-n}$; 6) $f(n^{-1}) = (2n+1)^{-1}$;
7) $f(n^{-1}) = f(-n^{-1}) = n^{-2}$; 8) $f(n^{-1}) = f(-n^{-1}) = n^3$?

8.51. Доказать первую теорему Вейерштрасса.

8.52. Доказать вторую теорему Вейерштрасса.

8.53. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ сходится равномерно внутри области D, где функции $f_n(z)$ – аналитические в области D, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$ сходится также равномерно внутри области D.

8.54. На области сходимости рядов исследовать суммы рядов на аналитичность:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} z(n^2+z^2)^{-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}|z|(n^2+|z|^2)^{-1}$.

8.55. Показать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nze^{-nz}-(n-1)ze^{-(n-1)z})$$

есть аналитическая функция на области сходимости ряда, но ряд на этой области сходится неравномерно.

8.56. Исследовать тэта-функцию $\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 z}$ на аналитичность.

8.57. Определить область аналитичности суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{2^n}.$$

8.58. Доказать аналитичность суммы ряда в указанных областях:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n+z)^{-1},\ z\neq -1,-2,\ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-n)^{-1},\ z\neq 1,\ 2,\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}(n+z)^n,\ |z|<1$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n!},\ z\in\mathbf{C}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} nz}{n!},\ z\in\mathbf{C}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{n^2 z},\ \operatorname{Re} z<0$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz^2},\ \pi/4<\arg z<3\pi/4,\ -3\pi/4<\arg z<-\pi/4$.

8.59. Доказать, что если семейство аналитических функций $\{f_n(z)\}$ ограничено внутри области D, то семейство $\{f_n'(z)\}$ также ограничено внутри D.

8.60. Доказать, что если семейство аналитических функций ограничено внутри D, то оно равностепенно непрерывно на любом компакте из D.

8.61. Пусть $\{f_n(z)\}$ – последовательность аналитических в области D функций, образующих ограниченное внутри D семейство. Доказать, что если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на плотном в D множестве, то она сходится равномерно внутри D.

8.62. Доказать, что из последовательности аналитических в области D функций $\{f_n(z)\}$, образующих ограниченное внутри D семейство, можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}\}$, равномерно сходящуюся внутри D.

8.63. Доказать теорему Витали.

8.64. Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится и функция $f(z)$ аналитична в области D. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n f(z))$ есть аналитическая функция в области D.

8.65. Доказать, что гамма-функция

$$\Gamma(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z+n-1}e^{(z-1)\ln\frac{n+1}{n}}$$

является аналитической функцией во всей комплексной плоскости, кроме точек $z=0,-1,-2,\dots$.

8.66. Пусть $\{f_n(z)\}$ – последовательность аналитических в области D функций и $f_n\neq-1$, $z\in D$. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ сходится равномерно в D, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ – аналитическая функция в области D.

8.67. Доказать, что следующие бесконечные произведения представляют собой аналитические функции в указанных областях:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n), |z|<1;$

2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}, |z|<\infty, z\neq-n;$

3) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{n}, |z|<\infty, z\neq n\,(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z};$

4) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n\frac{z}{n}), |z|<\infty, z\neq(-1)^{n+1}n;$

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(z)/n}{z/n}, |z|<\infty, z \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$;

6) $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}(2^{-n} z), |z|<\infty, z \neq 2^{n}(2k+1)\pi i, k \in \mathbf{Z}$;

7) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos(2^{-n} z), |z|<\infty, z \neq 2^{n-1}(2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$;

8) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n} z^{n}), |z|<2$.

8.68. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z\colon |z|<1\}$, $|f(z)|<1$, $|z|<1$, $f(0) \neq 0$. Последовательность $\{a_n\}$ – последовательность нулей функции $f(z)$, причем $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ сходится.

8.69. Доказать *теорему Бляшке*: для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ точек круга $\{z\colon |z|<1\}$ $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$, была множеством лежащих в круге $\{|z|<1\}$ нулей аналитической и ограниченной в круге $\{z\colon |z|<1\}$ функции $f(z)$, причем $f(z)$ не есть тождественный нуль, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$.

8.70. Доказать *теорему единственности*: пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z\colon |z|<1\}$ и ограничена. Если $f(z)$ обращается в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots$, $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, $n \in \mathbf{N}$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ расходится, то $f(z) \equiv 0$.

8.71. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\operatorname{Re} z>0$ и ограничена. Доказать, что если $f(n)=0$, $n \in \mathbf{N}$, то $f(z) \equiv 0$.

8.72. Доказать, что функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на границе круга сходимости степенного ряда имеет по крайней мере одну особую точку (радиус сходимости степенного ряда $0<R<\infty$).

8.73. Пусть ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости R, $0<R<\infty$. Разложим функцию $f(z)$ по степеням $(z-re^{i\alpha})$, $0<r<\infty$):

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-re^{i\alpha})^n .$$

Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\sqrt[n]{|b_n|})^{-1}=R-r$, то точка $z=Re^{i\alpha}$ будет особой для функции $f(z)$. Если же $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\sqrt[n]{|b_n|})^{-1}>R-r$, то точка $z=Re^{i\alpha}$ – правильная.

8.74. Доказать *теорему Принсхейма*: если радиус сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен 1 и $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, то точка z = 1 является особой точкой для функции f(z).

8.75. Доказать, что функция f(z), представленная рядом $1+\sum_{n=1}^{\infty}(z^{2^n}/n^2)$, аналитична в круге $|z|<1$ и непрерывна при $|z|\leq 1$, но любая точка окружности $|z| = 1$ является для нее особой.

8.76. Пусть b – комплексное число, $|b| < 1$, и пусть c – натуральное число, $c \geq 2$. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{c^n}$ имеет радиус сходимости $R = 1$ и что для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{c^n}$ каждая точка окружности $\{z : |z| = 1\}$ является особой.

8.77. Доказать, что если функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ аналитична в круге $\{z : |z| < R\}$ и $\operatorname{Re} f(z) \leq u$, то $|a_n| \leq \dfrac{2(u - \operatorname{Re} a_0)}{R^n}$, $n \geq 1$.

8.78. Пусть функция f(z) аналитична в круге $|z| \leq R_0$ и $n(r)$ – число нулей f(z) в круге $|z| < r < R_0$, $f(0) = 1$. Показать, что тогда $n(r) \leq \ln M(er)$, $er < R_0$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

8.79. Пусть функция f(z) аналитична в круге $|z| < R$ и в этом круге $\operatorname{Re} f(z) \leq A(R)$; показать, что тогда

$$M(r) \leq (A(R) - \operatorname{Re} f(0))\frac{2r}{R-r} + |f(0)|, 0 < r < R.$$

8.80. Пусть функция f(z) аналитична в круге $|z| \leq R$, $f(0) = 1$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \{|z| < R\}$; показать, что в этом случае

$$\ln |f(z)| \geq \frac{-2r}{R-r} \ln M(r), |z| \leq r < R.$$

8.81. Пусть $\{f_n(z)\}$ – последовательность функций, аналитических в замкнутом круге $|z| \leq R < \infty$. Пусть также эта последовательность сходится в пространстве $L_2(R)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N}:$$

$$\int_{|z|=R} |f_{n+p}(z) - f_n(z)|^2 ds < \varepsilon.$$

Доказать, что тогда последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри круга $|z| < R$.

Глава 9

РЯД ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$, где $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел, называется *рядом Лорана* с центром в точке z_0. По определению ряд Лорана сходится, если сходятся одновременно ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$ и $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_n)^n$. Таким образом, областью сходимости ряда Лорана является кольцо $\{z\colon r < |z - z_0| < R\}$, где

$$r = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|},\ R = (\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1},$$

при условии $r < R$. Ряд Лорана сходится абсолютно в кольце $\{z \in \mathbf{C}\colon r < |z - z_0| < R\}$, и равномерно – на любом компакте, принадлежащем этому кольцу. Его сумма представляет собой аналитическую в данном кольце функцию $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$, при этом

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, r<\rho<R.$$

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_n)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$ – *правильной частью* ряда Лорана.

Каждая аналитическая в кольце $\{z\colon r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$, причем единственным образом. Ряд Лорана можно почленно дифференцировать, при этом

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k},\ k\in\mathbf{N},$$

последний ряд сходится равномерно на любом компакте, принадлежащем кольцу $\{z\colon 0 < |z - z_0| < R\}$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Тогда в некотором кольце $\{z\colon 0 < |z - z_0| < R\}$ функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$.

Если коэффициенты $a_n = 0$ при $n = -1, -2, \dots$, то точку z_0 называют *устранимой особой точкой*. Если существует такое k, что $a_{-k} \neq 0$, $a_n = 0$ при $n = -(k+1), \dots, -(k+l) \dots$, то точку z_0 называют *полюсом* порядка k. Если точка z_0 не является ни устранимой особой точкой, ни полюсом, то такую точку называют *существенно особой*. Для определения характера особой точки $z_0 = \infty$ для функции $f(z)$ необходимо определить характер особой точки $z = 0$ для функции $g(z) \equiv f(1/z)$.

Теорема Сохоцкого–Вейерштрасса. Каково бы ни было комплексное число A (включая $A = \infty$), существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к существенно особой точке z_0 функции $f(z)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Теорема Пикара (большая). В сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает (и притом бесконечное число раз) любое конечное значение, за исключением, быть может, одного.

Функция, аналитическая во всей конечной плоскости, называется *целой функцией*.

Функция называется *мероморфной*, если в конечной плоскости у нее нет других особых точек, кроме полюсов.

9.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z\colon 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что точка a является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

9.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z\colon 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что точка a является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки a.

9.3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z: 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что точка a является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z \to a} = \infty$.

9.4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z: 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что если существует конечный $\lim\limits_{z \to a} (z - a)^k f(z) \neq 0$, то точка a является для функции $f(z)$ полюсом порядка k.

9.5. Доказать, что точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$ в некоторой окрестности этой точки, где функция $\varphi(z)$ аналитична в этой окрестности и $\varphi(z_0) \neq 0$.

9.6. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z: 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что если точка a есть нуль порядка k для функции $f(z)$, то точка a является полюсом порядка k для функции $1 / f(z)$. Если точка a является полюсом порядка k для функции $f(z)$, то она является нулем порядка k для функции $1 / f(z)$.

9.7. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z: 0 < |z - a| < r\}$. Доказать, что если не существует $\lim\limits_{z \to a} f(z)$, ни конечный, ни бесконечный, то точка a является существенно особой для $f(z)$.

9.8. Доказать теорему Сохоцкого–Вейерштрасса для целой функции, используя теорему Лиувилля.

9.9. Доказать *малую теорему Пикара*: целая функция $f(z)$, отличная от постоянной, принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

9.10. Доказать, что мероморфная функция $f(z)$, отличная от постоянной, принимает любое комплексное значение, за исключением, быть может, двух значений.

9.11. Доказать, что любая целая функция, не принимающая значения из правой полуплоскости, постоянна.

9.12. Доказать теорему Сохоцкого–Вейерштрасса.

9.13. Доказать теорему Сохоцкого–Вейерштрасса для точек накопления полюсов.

9.14. Доказать большую теорему Пикара.

9.15. Доказать, что если точка a – существенно особая точка для функции $f(z)$, то она является либо существенно особой, либо неизолированной особенностью для функции $1 / f(z)$.

9.16. Найти множества Z точек, в которых сходятся ряды Лорана:

1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$; 2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$; 3) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$;

4) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}, \alpha>0$; 5) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2+1}$; 6) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$;

7) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2} z^{n^3}$; 8) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2 e^{|n|}}$; 9) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}(z-z_0)^{-n}$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{z^{n+1}}$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{2n}} \dfrac{4^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$;

12) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}, c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!(n+k)!}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} \dfrac{1}{z^{2n-3}}$; 14) $\dfrac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1)^n}{3^n}$;

15) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(z-1)^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} \dfrac{1}{(z-1)^n}$.

9.17. Выяснить, допускают ли следующие функции разложение в ряд Лорана в окрестности заданной точки:

1) $f(z) = \cos(1/z)$, $z = 0$; 2) $f(z) = \cos(1/z)$, $z = \infty$;

3) $f(z) = \sec(1/(z-1))$, $z = 1$; 4) $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $z = \infty$;

5) $f(z) = \operatorname{th}(1/z)$, $z = 0$; 6) $f(z) = z^2 / (\sin(1/z))$, $z = 0$;

7) $f(z) = 1 / (\sin z - 5)$, $z = \infty$.

9.18. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в кольце $\{z\colon r < |z - z_0| < R\}$, то для коэффициентов a_n в разложении ее в ряд Лорана справедливы неравенства Коши:

$$|a_n| \le M_\rho \rho^{-n}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$r < \rho < R, M_\rho = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|.$$

9.19. Пусть ряд Лорана некоторой функции сходится в замкнутом кольце $\{z\colon r \le |z - z_0| \le R\}$. Доказать, что для его коэффициентов справедливы неравенства

$$|a_n| \le M(r^{-n} + R^{-n}),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

M – константа, не зависящая от n.

9.20. Представить ряд Лорана в форме ряда Фурье.

9.21. Показать, что функция $e^{c(z-1/z)/2}$ разлагается в ряд Лорана в области $\{z: 0 < |z| < \infty\}$, при этом

$$e^{c(z-1/z)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi + c\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Функция $e^{c(z-1/z)/2}$ называется *производящей* для функций Бесселя $a_n(c)$. Показать, что коэффициенты $a_n(c)$ удовлетворяют уравнению Бесселя:

$$c^2 J''_\lambda(c) + cJ'_\lambda(c) + (c^2 - \lambda^2) J_\lambda(c) = 0$$

при целом индексе $\lambda = n$. Интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - c\sin\varphi)\,d\varphi$ называется *интегралом Бесселя*.

9.22. Пусть ряды Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_n)^n$ сходятся в кольце $\{z: r < |z - z_0| < R\}$ к суммам $f(z)$ и $g(z)$ соответственно. Доказать, что ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_n)^n$, где $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$, сходится в том же кольце к функции $f(z)\cdot g(z)$.

9.23. Разложить в ряд Лорана по степеням z следующие функции и указать область сходимости ряда Лорана:

1) $(z - a)^{-1}$; 2) $(z - a)^{-2}$;

3) $(z^2 - a^2)^{-1}$; 4) $(z - a)^2 (z - b)^{-2}$, $a \ne b$.

9.24. Функцию $f(z) = (1 - z)^{-1}(2 + z)^{-1}$ разложить в ряд Лорана в областях:

1) $\{|z| < 1\}$; 2) $\{1 < |z| < 2\}$; 3) $\{|z| > 2\}$.

9.25. Разложить по степеням $(z - a)$ в указанном кольце D следующие функции:

1) $f(z) = z^{-1}(z - 3)^{-2}$, $a = 1$, $D = \{z: 1 < |z - 1| < 2\}$;

2) $f(z) = z^{-2}(z^2 - 9)^{-1}$, $a = 1$, $D = \{z: 1 < |z - 1| < 2\}$;

3) $f(z) = z^{-2}(z + i)$, $a = i$, $-i \in D$;

4) $f(z) = z^3(z + 1)^{-1}(z - 2)^{-1}$, $a = -1$, $D = \{z: 0 < |z + 1| < 3\}$;

5) $f(z) = (z^2 - 1)^{-1}(z^2 + 4)^{-1}$, $a = 0$, $D = \{z: |z| > 2\}$;

6) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $a = 0$, $D = \{z: |z| > 0\}$;

7) $f(z) = z^2 \sin(\pi(z+1)/z)$, $a = 0$, $D = \{z: |z| > 0\}$;

8) $f(z) = z^3 \cos(1/(z-2))$, $a = 2$, $D = \{z: 0 < |z - 2|\}$;

9) $f(z) = z^{-1}(1 - z)^{-1} e^z$, $a = 0$, $D = \{z: 0 < |z| < 1\}$;

10) $f(z) = z^{-1}(1 + z)^{-1} e^{(z-1)^{-1}}$, $a = 1$, $D = \{z: 1 < |z - 1| < 2\}$.

9.26. Разложить в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ следующие функции:

1) $\cos((z + 1)/z)$; 2) $z^2 \sin(1/z)$; 3) $1/(z^2 + 1)$;

4) $z^6/((z^2 + 1)(z^2 - 4))$; 5) $e^{z+z^{-1}}$.

9.27. Найти особые точки для функций, выяснить их характер, исследовать поведение функций на бесконечности:

1) $(z - z^3)^{-1}$; 2) $(1 + z^4)^{-1}$; 3) $(1 + z^2)^{-1}$;

4) $(z^2 + 1)e^{-z}$; 5) $(e^{-z} - 1)^{-1} - z^{-1}$; 6) $e^{(z-1)^{-1}}$;

7) $(e^z - 1)^{-1}$; 8) $(\sin z - \sin a)^{-1}$, $a \neq 0$; 9) $e^{(\operatorname{tg} z)^{-1}}$.

9.28. Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет на окружности круга сходимости $\{z: |z| < R\}$ только одну особую точку z_0 – полюс первого порядка. Доказать, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / a_{n+1}) = z_0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}| = R$. Доказать, что утверждение остается верным, если точка z_0 – полюс порядка k.

9.29. Доказать, что если на окружности круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ имеется хотя бы один полюс функции $f(z)$, то ряд расходится во всех точках этой окружности.

9.30. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D = \{z: |z| > R\}$, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. При каких условиях функция $F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ будет аналитической функцией в области $\{R < |z| < \infty\}$? Пусть точка z_0 и путь интегрирования лежат в области D; что можно сказать о поведении $F(z)$ в бесконечно удаленной точке, исходя из поведения функции $f(z)$ в этой точке z_0?

9.31. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности:

1) один простой полюс; 2) один полюс порядка k;

3) полюс порядка n в точке $z = 0$ и полюс порядка m на бесконечности; 4) n полюсов первого порядка.

9.32. Какую особенность имеет в точке z_0 функция $F(z) = f[\varphi(z)]$, если функция $\varphi(z)$, не равная тождественно нулю, в этой точке аналитична, а точка $\zeta_0 = \varphi(z_0)$ является для функции $f(\zeta)$:

1) устранимой особой точкой;

2) полюсом порядка k;

3) существенно особой точкой.

9.33. Пусть функция $f(z)$ в некоторой области не имеет других особенностей, кроме полюсов. Доказать, что функция $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)-A}$ имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и во всех точках, в которых $f(z) = A$, и не имеет других особенностей в этой области.

9.34. Пусть функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной области особые точки, являющиеся только полюсами. Доказать, что $f(z)$ – рациональная функция.

9.35. Доказать, что любая мероморфная функция является частным от деления двух целых функций.

9.36. Доказать, что если каждая функция $f_k(z)$ имеет в точке a полюс порядка k, то функция $f(z) \equiv f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ имеет в точке a полюс порядка n, $1 < k < n$. .

9.37. Пусть точка a есть изолированная особая точка функции $f(z)$ и в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $|f(z)| < M\,|z - a|^{-m}$, где M, m – положительные константы. Доказать, что точка a не может быть существенно особой для функции $f(z)$.

9.38. Доказать, что если точка a является полюсом для функции $f(z)$, то для функции $e^{f(z)}$ она является существенно особой.

9.39. Пусть точка a является существенно особой для функции $f(z)$ и пусть $M_\rho = \max\limits_{|z-a|=\rho} |f(z)|$. Доказать, что $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho^k M_\rho = \infty$ для любого $k > 0$.

9.40. Пусть точка a есть изолированная особая точка для функции $f(z)$. Доказать, что если $\operatorname{Re} f(z) > 0$ в некоторой окрестности точки a, то она является устранимой особой точкой.

9.41. Пусть $\{f_n(z)\}$ – последовательность аналитических в кольце $\{z\colon 0 < |z - a| < R\}$ функций, равномерно сходящихся на каждом компакте, принадлежащем этому кольцу. Доказать, что если точка a является для каждой функции $f_n(z)$ полюсом порядка m, то для предельной функции $f(z)$ точка a является либо полюсом порядка не выше m, либо устранимой особой точкой.

9.42. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке a $(a \neq \infty)$, а для функции $g(z)$ эта точка является существенно особой. Доказать, что для функции $F(z) = g(z)' + f(z)\cdot g(z)$ точка a также является существенно особой. Верно ли это утверждение, если a – бесконечно удаленная точка?

9.43. Пусть функции $a_1(z)$, $a_2(z)$, …, $a_n(z)$ аналитичны в точке a или имеют в ней полюс, а для функции $f(z)$ точка a является существенно особой. Доказать, что для функции

$$F(z) = f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \ldots + a_{n-1} f'(z) + a_n(z)$$

точка a также является существенно особой.

9.44. Пусть

$$F(z) = f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \ldots + a_{n-1} f(z) + a_n(z),$$

где функции $f(z)$ и $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, определены в задаче 9.43. Верно ли утверждение, что точка a есть существенно особая точка, если $a \neq \infty$?

9.45. Пусть функции $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, аналитичны в точке $a \neq \infty$, и эта точка для функции $f(z)$ является существенно особой. Будет ли точка a существенно особой для функции $F(z)$ задачи 9.44?

Глава 10
ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ И РЯДЫ ДИРИХЛЕ

Функция $f(z)$, аналитическая на всей конечной плоскости, называется *целой*. Целая функция $f(z)$ может либо не иметь ни одного нуля, либо иметь их конечное число, либо обладать счетным множеством нулей. В первом случае она представляется в виде

$$f(z) = e^{g(z)},$$

во втором случае — в виде

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_n)^{k_n} \cdot e^{g(z)},$$

где $g(z)$ — целая функция, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — различные между собой нули $f(z)$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — кратности этих нулей.

Справедлива *теорема Вейерштрасса*: какова бы ни была сходящаяся к бесконечности последовательность неубывающих по модулю комплексных чисел, всегда существует целая функция $f(z)$, нули которой совпадают с членами этой последовательности.

Пусть целая функция $f(z)$ имеет бесконечное множество нулей $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots, z_n \neq 0$ (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность), $|z_n| \leq |z_{n+1}|$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть $z = 0$ является λ-кратным нулем функции, причем если $f(0) \neq 0$, то $\lambda = 0$.

Имеет место *теорема о разложении целой функции в бесконечное произведение*. Любая целая функция $f(z)$ с нулями $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, может быть представлена в виде

$$f(z) = z^{\lambda} e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n\right),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция.

Положим $M_r = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Говорят, что целая функция $f(z)$

имеет *конечный порядок*, если существует такое $\mu > 0$, что для всех $r \geq r_0$, r_0 – фиксированное число, справедливо неравенство

$$M_r < e^{r^\mu}, r \geq r_0.$$

Нижняя грань ρ множества чисел μ, удовлетворяющих этому неравенству, называется *порядком* целой функции $f(z)$. Если данное неравенство не удовлетворяется ни при каком μ, то говорят, что функция $f(z)$ имеет *бесконечный порядок* ($\rho = \infty$). Порядок ρ можно вычислить по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln M_r}{\ln r}.$$

Пусть функция $f(z)$ имеет порядок ρ, $0 < \rho < \infty$. Говорят, что целая функция $f(z)$ имеет *конечный тип* при порядке ρ, если существует такое $a > 0$, что

$$M_r < e^{ar^\rho}, r \geq r_0.$$

Нижняя грань σ множества чисел a называется *типом функции* $f(z)$. Если данное неравенство не выполняется ни при каком конечном a, то говорят, что функция $f(z)$ имеет *бесконечный тип* ($\sigma = \infty$) при порядке ρ.

Целая функция $f(z)$ порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, имеет по определению минимальный, нормальный, максимальный тип, если $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$ соответственно. Если $0 < \rho < \infty$, то тип σ можно вычислить по формуле

$$\sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_r}{r^\rho}.$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ – последовательность комплексных чисел, $z_1 \neq 0$, $|z_n| \uparrow \infty$. Нижняя грань τ множества положительных чисел α, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty,$$

называется *показателем сходимости последовательности* $\{z_n\}$. Если не существует конечного α, при котором выполняется неравенство, то полагают $\tau = \infty$.

Теорема. Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка ρ, и $\{z_n\}$ – последовательность ее нулей, $z_1 \neq 0$, $|z_n|\uparrow\infty$; тогда показатель τ последовательности $\{z_n\}$ меньше или равен ρ.

Положим по определению

$$E\left(\frac{z}{z_n},k\right)=\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\quad z_n\neq 0,\, k\in\mathbf{N}.$$

Рассмотрим целую функцию $f(z)$ порядка $\rho<\infty$ с нулями z_1, z_2, … ($z_1\neq 0$), $|z_n|\uparrow\infty$. Пусть k – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{k+1}}<\infty.$$

Функция $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\dfrac{z}{z_n},k\right)$ называется *каноническим произведением* для целой функции $f(z)$.

Теорема. Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок $\rho<\infty$, и z_1, z_2, …, z_n – ее нули ($z_1\neq 0$), $|z_n|\uparrow\infty$, τ – показатель сходимости последовательности $\{z_n\}$. Тогда каноническое произведение $F(z)$ есть целая функция порядка τ, причем, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\tau}}<\infty,$$

то $F(z)$ – целая функция порядка τ конечного типа.

Теорема Бореля. Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка ρ, $\{z_n\}$ – последовательность ее нулей с показателем сходимости τ, $z_1\neq 0$, $|z_n|\uparrow\infty$, k – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|z_n|^{k+1}}<\infty$. Тогда справедливо разложение

$$f(z)=z^{\lambda}e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},k\right),$$

где $h(z)$ – многочлен степени h, при этом $\rho=\max(h,\tau)$.

По определению целая функция $f(z)$ принадлежит классу функций $[\rho, \infty)$, если она имеет порядок меньше ρ, или порядок ρ и конечный тип, $f(z) \in [\rho, \infty)$.

Целая функция $f(z)$ называется *целой функцией экспоненциального типа*, если ее порядок $\rho < 1$ или $\rho = 1$, и тип σ – конечный, $f(z) \in [1, \infty)$.

Представим целую функцию $f(z)$ рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k.$$

Функция $\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}}$ называется *функцией, ассоциированной по Борелю* с $f(z)$.

Пусть $\overline{G}$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество на плоскости. По определению *опорной функцией множества* $\overline{G}$ называется функция

$$K(\varphi) = \max_{z \in \overline{G}} \operatorname{Re}(z e^{-i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Пусть $f(z)$ – целая функция и $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$. Выпуклая оболочка множества особенностей функции $\gamma(t)$ называется *сопряженной диаграммой функции* $f(z)$. Сопряженная диаграмма – это наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$. По определению функция

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln|(f(re^{i\varphi}))|}{r},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

называется *индикатрисой роста функции* $f(z)$.

Теорема Полиа. Пусть $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$, $\overline{D}$ – ее сопряженная диаграмма, $K(\varphi)$ – опорная функция множества $\overline{D}$. Тогда $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Пусть $F(z)$ – целая функция. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z \cdot (z-1) \cdot \ldots \cdot (z-k+1),$$

где $\Delta^k F(0) = F(k) - C_k^1 F(k-1) + C_k^2 F(k-2) + \ldots + (-1)^k F(0)$, называется *интерполяционным рядом Ньютона*.

Теорема. Пусть $F(z)$ – целая функция экспоненциального типа, $\overline{D}$ – ее сопряженная диаграмма, G – область на комплексной плоскости $\{z \in \mathbf{C}: |e^z - 1| < 1\}$. Если $\overline{D} \subset G$, то функция $F(z)$ разлагается в интерполяционный ряд Ньютона

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z \cdot (z-1) \cdot \ldots \cdot (z-k+1).$$

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, где $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел, а показатели $\lambda_n > 0$ и $|\lambda_n| \uparrow \infty$, называется *рядом Дирихле*.

Ряд Дирихле или всюду сходится, или всюду расходится, или существует такое число c, что ряд Дирихле сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$ и расходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c$. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > c$ называется *полуплоскостью сходимости*, прямая $\operatorname{Re} z = c$ – *прямой сходимости*, величина c – *абсциссой сходимости* ряда Дирихле. Если ряд сходится всюду, то полагают $c = -\infty$, а если ряд всюду расходится, то полагают $c = +\infty$.

Полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$ называется *полуплоскостью абсолютной сходимости* ряда Дирихле, если ряд Дирихле сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$ и не сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$. Прямая $\operatorname{Re} z = a$ называется *прямой абсолютной сходимости*, величина a – *абсциссой абсолютной сходимости*. Если ряд всюду сходится абсолютно, то полагают $a = -\infty$, если ряд нигде не сходится абсолютно, то полагают $a = +\infty$.

Нижняя грань τ множества таких чисел α, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ ряд сходится равномерно, называется *абсциссой равномерной сходимости* ряда Дирихле. Справедливо соотношение $c \le \tau \le a$.

10.1. Доказать, что для того, чтобы целая функция была многочленом, необходимо и достаточно, чтобы начиная с некоторого $r \ge r_0$ выполнялось неравенство

$$M_r < Ar^q, \; M_r = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

где A и q – положительные константы, не зависящие от r.

10.2. Доказать, что порядок ρ можно вычислить по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln\ln M_r}{\ln r}.$$

10.3. Определить порядок целых функций:

1) $f(z)$ – многочлен; 2) $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \cos z$;
4) $f(z) = e^z$; 5) $f(z) = \operatorname{ch} z$; 6) $f(z) = \operatorname{sh} z$;
7) $f(z) = e^{P(z)}$), $P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$, $a_0 \neq 0$;
8) $f(z) = e^{\sin z}$; 9) $f(z) = e^{\cos z}$; 10) $f(z) = e^z \sin z$;
11) $f(z) = e^z \cos z$; 12) $f(z) = e^{e^z}$.

10.4. Определить тип целых функций, рассмотренных в предыдущей задаче.

10.5. Доказать, что обобщенная гипергеометрическая функция

$$pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, z) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdot \ldots \cdot (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdot \ldots \cdot (\beta_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha + n)$, $(\alpha)_0 = 1$, параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ – произвольные комплексные числа, $\beta_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, q$, является целой функцией, если $q \geq p$. Найти ее порядок.

10.6. Доказать, что функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^k} e^{inz}, \quad k > 1, |q| < 1,$$

является целой, найти ее порядок.

10.7. Пусть $\alpha > 0$. Доказать, что функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}$$

есть целая функция порядка $1/\alpha$.

10.8. Доказать, что тип σ целой функции порядка ρ можно вычислить по формуле

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_r}{r^\rho}.$$

10.9. Пусть $P(z)$ – многочлен. Доказать:

1) если $f(z)$ – целая функция порядка ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$, то $f(z) \cdot P(z)$ имеет порядок ρ;

2) если $f(z)$ – целая функция порядка ρ, $0<\rho<\infty$, типа σ, $0\le\sigma\le\infty$, то функция $f(z)\cdot P(z)$ имеет тип σ при порядке ρ.

10.10. Доказать, что если функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ – целая, то порядок ρ подсчитывается по формуле

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{|\ln|a_n||}.$$

10.10.1. Доказать, что функция $f(z)=1/\Gamma(z)$, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, есть целая функция. Показать, что порядок $\rho=1$, а тип $\sigma=\infty$.

10.11. Доказать, что если функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ – целая функция порядка ρ, $0<\rho<\infty$, то ее тип σ определяется по формуле

$$(\sigma e\rho)^{1/\rho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

10.12. Доказать, что следующие функции целые, найти порядок и тип функций:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Az)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $A>0,\alpha>0$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n/\alpha}z^n,\alpha>0$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}z^n$; 5) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{n/\alpha}z^n,\alpha>0$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+a}}}, a>0$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!}z^n$.

10.13. Доказать, что если функция $f(z)$ – целая, то порядок и тип функции $f(z)$ равен порядку и типу ее производной.

10.14. Пусть $f_1(z)$ – целая функция порядка ρ, $f_2(z)$ – целая функция порядка меньше ρ. Доказать, что функции $f_1(z)\cdot f_2(z)\cdot$ и $f_1(z)+f_2(z)$ имеют порядок ρ.

10.15. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – целые функции одного порядка и типов σ_1 и σ_2 соответственно. Пусть $\sigma_1<\sigma_2$. Что можно сказать о порядке и типе функций $f_1(z)\cdot f_2(z)\cdot$ и $f_1(z)+f_2(z)$?

10.16. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – целые функции одного порядка и одного типа. Что можно сказать о порядке и типе функций $f_1(z)\cdot f_2(z)\cdot$ и $f_1(z)+f_2(z)$?

10.17. Каков порядок функции $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\rho}z^n$, если порядок функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ есть ρ?

10.18. Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка ρ и имеет бесконечно много нулей $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ($z_1 \neq 0$), $|z_n|\uparrow\infty$. Доказать, что показатель τ последовательности $\{z_n\}$ меньше или равен ρ.

10.19. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ, $0<\rho<\infty$, конечного типа σ, и у нее имеется бесконечно много нулей $\{z_n\}$, $z_1\neq 0$, $|z_n|\uparrow\infty$. Доказать, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|z_n|^{\rho}}\leq \sigma e\rho.$$

10.20. Показать, что каноническое произведение

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},k\right)$$

удовлетворяет условиям:

1) является целой функцией;

2) имеет порядок $\rho=\tau$;

3) если $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\tau}}<\infty$, то тип конечен.

10.21. Разложить в бесконечное произведение следующие функции:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{sh} z$; 4) $\operatorname{ch} z$; 5) $e^{az}-e^{bz}$; 6) $\operatorname{ch} z-\cos z$.

10.22. Найти нули функции $e^{e^z}-1$ и показать, что они не имеют конечного показателя сходимости.

10.23. Показать, что функция Бесселя

$$J_{\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}\,n!\,\Gamma(\nu+n+1)},\ \nu>-1,$$

является целой, найти порядок и тип функции. Доказать, что $J_{\nu}(z)$ имеет бесконечно много нулей, и все ее нули – вещественные числа.

10.24. Доказать, что функция $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z/e^{n})$ – целая, а ее порядок $\rho=0$.

10.25. Доказать, что функция $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z/n^{\sigma})$ – целая, ее порядок $\rho=1/\sigma$, $\sigma>1$.

10.26. Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок ρ, $0<\rho<\infty$. Доказать, что если ρ не целое, то последовательность A-точек имеет показатель сходимости $\tau_A=\rho$ при любом A. Если ρ – целое, то $\tau_A=\rho$ для всех A, за исключением, быть может, одного значения A.

10.27. Найти исключительное значение для функции $f(z)=\sin z\cdot e^{z^2}$ (см. предыдущую задачу).

10.28. Доказать следующую *теорему единственности для целых функций.* Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок не больше ρ. Если функция $f(z)$ обращается в нуль на последовательности $\{z_n\}$ с показателем сходимости $\tau>\rho$, то $f(z)\equiv 0$.

10.29. Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок не выше ρ, или при порядке ρ тип не выше σ. Доказать, что если функция $f(z)$ обращается в нуль на последовательности $\{z_n\}$, и при этом

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|z_n|^{\rho}}>\sigma e\rho,$$

то $f(z)\equiv 0$.

10.30. Пусть $0<|z_1|\le|z_2|\le\ldots\le|z_n|\le\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$, и пусть целые p_n таковы, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}<\infty$ при любом r, $0<r<\infty$, $|z_n|=r_n$. Доказать, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)\equiv\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n-1}\right)$$

является целой функцией, которая имеет нули только в точках $\{z_n\}$.

10.31. Доказать теорему о разложении целой функции в бесконечное произведение.

10.32. Доказать теорему Бореля о разложении целой функции в бесконечное произведение.

10.33. Доказать, что функция $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+a)^s n!}, a>0,$ принадлежит классу $[1, \infty]$, т. е. целая функция экспоненциального типа, s – любое вещественное число.

10.34. Пусть функция $g(t) \in C[a, b]$. Доказать, что функция $f(\mathrm{z}) \equiv \int_a^b e^{izt} g(t)dt$ принадлежит классу $[1, \infty)$.

10.35. Доказать, что функция $f(\mathrm{z})$ из предыдущей задачи при $\mathrm{z} \to \infty$ по вещественной оси стремится к нулю. Вывести отсюда, что функция $f(\mathrm{z})$ имеет бесконечно много нулей.

10.36. Пусть функции $f(\mathrm{z}) \in [\rho, \infty)$, $\varphi(\mathrm{z}) \in [\rho, \infty)$, $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \ldots$ – нули $f(\mathrm{z})$ кратности $m_1, m_2, \ldots$. Функция $\varphi(\mathrm{z})$ имеет те же нули (могут быть и другие), кратностей не меньше $m_1, m_2, \ldots$. Доказать, что функция $F(\mathrm{z}) = \varphi(\mathrm{z}) / f(\mathrm{z}) \in [\rho, \infty)$.

10.37. Доказать, что если $f(\mathrm{z}) = A\, f_1(\mathrm{z}) + B\, f_2(\mathrm{z})$, то функция, ассоциированная по Борелю с $f(\mathrm{z})$, $\gamma(t) = A\,\gamma_1(t) + B\,\gamma_2(t)$, где $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ – функции, ассоциированные по Борелю с функциями $f_1(\mathrm{z})$, $f_2(\mathrm{z})$.

10.38. Найти $\gamma(t)$ для следующих функций:

1) $Ae^{a\mathrm{z}}$; 2) $\sin \mathrm{z}$; 3) $\cos \mathrm{z}$; 4) $\operatorname{sh} \mathrm{z}$; 5) $\operatorname{ch} \mathrm{z}$.

10.39. Найти $\gamma(t)$ для квазиполинома

$$P(z) = \sum_{i=1}^{k} A_i e^{d_i z},\ A_i \neq 0,$$

где d_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, – вершины выпуклого многоугольника $\overline{D}$.

10.40. Найти опорные функции для круга $\{\mathrm{z}: |\mathrm{z}| < \sigma\}$ и для отрезка $[-\sigma i, \sigma i]$, $\sigma > 0$.

10.41. Доказать, что если $K(\varphi)$ – опорная функция множества $\overline{G}$, то опорная функция $\overline{G}_\varepsilon$ есть $K(\varphi) + \varepsilon$, где $\overline{G}_\varepsilon$ – ε-расширение $\overline{G}$.

10.42. Доказать, что опорная функция $K(\varphi)$ – непрерывная функция.

10.43. Доказать, что если опорные функции выпуклых множеств равны, то и сами множества равны.

10.44. Найти сопряженные диаграммы для следующих функций:

1) Ae^{az}; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$; 4) $\cos z \cdot \cos(iz)$; 5) $\operatorname{sh} z$;
6) $\operatorname{ch} z$; 7) $f(z)$ – квазиполином.

10.45. Доказать, что если $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)\, e^{zt}\, dt\,,$$

где C – жорданов спрямляемый замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\overline{D}$ функции $f(z)$.

10.46. Пусть $f(z)$ – функция экспоненциального типа, $\overline{D}$ – сопряженная диаграмма, и $K(\varphi)$ – ее опорная функция. Доказать оценку: для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|\, f(re^{i\varphi})\,| < A(\varepsilon)\, e^{[K(-\varphi)+\varepsilon]r}.$$

10.47. Пусть $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией $f(z)$ экспоненциального типа. Доказать, что в полуплоскости $\operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$, где $h(\varphi)$ – индикатриса роста $f(z)$, $\gamma(t)$ есть аналитическая функция и справедливо представление

$$\gamma(t) = \int f(z)\, e^{-zt}\, dz,$$

интеграл берется по лучу $\arg z = \varphi_0$.

10.48. Доказать *теорему Полиа:* пусть функция $f(z)$ – целая, экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$, $\overline{D}$ – сопряженная диаграмма, $K(\varphi)$ – опорная функция множества $\overline{D}$; тогда $h(\varphi) = K(-\varphi)$.

10.49. Доказать свойства индикатрисы роста $h(\varphi)$:

1) непрерывность;

2) $\max h(\varphi) = \sigma$ $(\sigma = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\, a_k\,|})$;

3) $h(\varphi) \geq -\sigma$.

10.50. Доказать, что для функции $f(z) = \sin z$ справедливы соотношения:

1) $h(\varphi) = |\sin \varphi|$;

2) $|\sin z| < e^{h(\varphi)\, r}$;

3) $|\sin z| > A(\varepsilon)\, e^{h(\varphi)\, r}$ вне окрестностей $|z - k\pi| < \varepsilon$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

10.51. Найти индикатрисы роста следующих функций:

1) e^z; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) e^{z^n}; 7) $e^z + z^2$.

10.52. Пусть целая функция $f(z)$ имеет индикатрису роста $h(\varphi)$. Определить индикатрису роста функции $F(z) = P(z) + f(z)$, где $P(z)$ – многочлен.

10.53. Найти индикатрису роста $h(\varphi)$ для квазиполинома.

10.54. Доказать, что бесконечное произведение

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right),\ 0 < \lambda_k \uparrow \infty,\ \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k} = \sigma < \infty$$

1) есть функция экспоненциального типа;

2) индикатриса роста: $h(\varphi) = \pi\sigma\,|\sin \varphi|$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

10.55. Пусть $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа и $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$. Доказать, что для функции $f^{(m)}(z)$ ассоциированная с нею по Борелю функция имеет вид

$$t^m\gamma(t) - t^{m-1}f(0) - t^{m-2}f'(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0).$$

10.56. Пусть $\overline{D}$ – сопряженная диаграмма функции $f(z)$. Доказать, что индикатрисы роста функции $f(z)$ и ее производной $f'(z)$ совпадают, если начало координат есть точка или внутренняя для D, или внешняя для $\overline{D}$, или граничная для $\overline{D}$, не являющаяся внутренней точкой отрезка, входящего в состав границы $\overline{D}$.

10.57. Показать, что условие на сопряженную диаграмму $\overline{D}$ в предыдущей задаче является существенным.

10.58. Пусть $F(z)$ – целая функция экспоненциального типа, $\overline{D}$ – ее сопряженная диаграмма. Доказать, что если $\overline{D} \subset G$, область $G = \{z: |e^z - 1| < 1\}$, то функция $F(z)$ разлагается в интерполяционный ряд Ньютона

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z(z-1)\dots(z-k+1).$$

10.59. Доказать еще одну *теорему Полиа*: пусть целая функция $F(z)$ есть функция экспоненциального типа, и сопряженная диаграмма $\overline{D} \subset G$ ($G = \{z: |e^z - 1| < 1\}$). Если $F(k)$ – целые числа, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $F(z)$ – многочлен.

10.60. Рассмотрим функцию $f(z) = e^{z\ln 2}$. Не противоречит ли этот пример теореме Полиа, так как $f(k) = 2^k$?

10.61. Показать, что если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, сходится в точке z_0, то:

1) ряд сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0$;

2) в каждом секторе $|\arg(z - z_0)| \le \theta < \pi/2$ сходится равномерно.

10.62. Доказать, что если ряд Дирихле сходится абсолютно в точке $z = z_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z \ge \mathrm{Re}\, z_0$.

10.63. Доказать единственность разложения в ряд Дирихле, а именно: если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$, то $a_n = b_n$, $n = 1, 2, \dots$.

10.64. Привести пример ряда Дирихле, который:

1) сходится на всей плоскости;

2) всюду расходится;

3) для него существует конечная абсцисса сходимости.

10.65. Привести пример ряда Дирихле, который:

1) сходится абсолютно на всей плоскости;

2) абсолютно расходится всюду;

3) для него существует конечная абсцисса абсолютной сходимости.

10.66. Найти множество точек сходимости следующих рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} e^{n^2\sqrt{n}\,z}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(-1)^n n z}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} (e^{n^2 z} + e^{-n^2 z})$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} e^{n^2 i z}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} e^{i(n^2+n)z}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i^n n z}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{inz}}{n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{i(n\ln n)z}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{inz}$.

10.67. Найти области сходимости следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+n^3)(e^{nz}+e^{-inz})$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{in^2 z}-e^{-in^2 z})$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(e^{inz}+e^{-inz})$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}(e^{inz}+e^{nz})$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(e^{nz}+e^{-nz}+e^{inz}+e^{-inz})$.

10.68. Показать, что для абсцисс простой, абсолютной и равномерной сходимости (c, a и τ соответственно, см. стр. 126) справедливы неравенства $c \le \tau \le a$.

10.69. Показать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n/\lambda_n = h$, то $a - c \le h$ (a и c – см. 10.68).

10.70. Привести пример ряда, для которого $a - c = h$ (a и c – см. 10.68).

10.71. Доказать, что если $h = 0$, то абсцисса сходимости c может быть вычислена по формуле

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \ln|a_n|/\lambda_n.$$

10.72. Найти абсциссы сходимости, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} e^{-zn}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-zn}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^3} e^{-n^2 z}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-z\ln n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} e^{-z\ln n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{z-\ln\ln n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} e^{-n^2 z}$.

10.73. Доказать аналог неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, $0 < \lambda\uparrow\infty$, абсцисса абсолютной сходимости $a < +\infty$. Доказать, что

$$|a_n| \le M(x) e^{\lambda_n x},\ x > a,\ n \ge 1,\ M(x) = \sup_{-\infty<y<\infty} |f(x+iy)|.$$

10.74. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, $0 < \lambda \uparrow \infty$, абсцисса абсолютной сходимости $a < +\infty$. Доказать, что

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f(z) e^{\lambda_n z} dy, n = 1, 2, \ldots, z = z + iy, x > a,$$

где t_0 – некоторое фиксированное вещественное число.

10.75. Доказать аналог теоремы Лиувилля: если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ сходится во всей плоскости и

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

удовлетворяет условию $\sup\limits_{-\infty < y < \infty} |f(x+iy)| < Ae^{a|x|}$, A, a – положительные константы, то $f(z) = \sum_{\lambda_n \le a} a_n e^{-\lambda_n n^z}$.

10.76. Пусть λ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – комплексные числа. Доказать, что множество точек абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ выпукло.

10.77. Пусть M – множество точек абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ и D – открытая область, состоящая из внутренних точек множества M. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ внутри D сходится равномерно и сумма ряда в области D – аналитическая функция.

10.78. Пусть $|\lambda_n| \uparrow \infty$ и $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \ln n / |\lambda_n| = H < \infty$. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится в области D, то:

1) в точке $z_0 \in D$ и удаленной от ∂D на расстояние больше H, ряд сходится абсолютно;

2) если ряд сходится во всей плоскости, то он сходится и притом абсолютно;

3) если $H = 0$, то открытая область сходимости ряда совпадает с открытой областью абсолютной сходимости. В этом случае открытая область сходимости – выпуклая.

10.79. Привести пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty$, область сходимости которого

а) не является плоскостью; б) не является полуплоскостью.

10.80. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{h'(\lambda_n)},\ h(\lambda) = \frac{\sin(a\lambda)\sin(ia\lambda)}{\lambda^2},\ a > 0,$$

n – нули $h(\lambda)$, $|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$, $n \in \mathbf{N}$.

10.81. Показать, что для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ с комплексными показателями λ_n

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots,\ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty,$$

теорема единственности не имеет места. Рассмотреть пример из предыдущей задачи.

10.82. Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq R$ и имеет (по меньшей мере) n нулей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в открытом круге $|z| < R$. Доказать, что если $f(0) \neq 0$, то справедливо неравенство

$$\frac{R^n}{|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n|} \leq \frac{M(R)}{f(0)},\ M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

10.83. Для заданного ρ: $0 \leq \rho \leq +\infty$ построить целую функцию порядка ρ.

10.84. Для заданных ρ $(0 \leq \rho \leq +\infty)$ и σ $(0 \leq \sigma \leq +\infty)$ построить целую функцию порядка ρ и типа σ.

10.85. Доказать, что если $f(z)$ – целая функция и $\operatorname{Re} f(z) \leq c$, ($c$ – константа), то $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

10.86. Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок ρ $(0 < \rho < \infty)$, ρ – не целое. Доказать, что для любого $A \in \mathbf{C}$ последовательность A-точек функции $f(z)$ имеет показатель сходимости ρ.

10.87. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ $(0 < \rho < \infty)$, ρ – не целое. Доказать, что функция $f(z)$ имеет бесконечно много нулей.

Глава 11

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbf{C}$, функция $F(z)$ является однозначной аналитической функцией в области $D \subset \mathbf{C}$, $E \subset D$, и $F(z) = f(z)$ для всех $z \in E$. Тогда функцию $F(z)$ называют *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ с множества E на область D. В силу теоремы единственности, если множество E имеет предельную точку, лежащую в D, то аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f(z)$ из множества E в область D единственно.

Функция $f(x)$ действительного переменного x называется *аналитической на интервале* (a, b) действительной прямой, если для любого $x_0 \in (a, b)$ функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 можно представить в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \; a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Если существует функция $F(z)$ комплексного переменного z, которая аналитична в области $D \subset \mathbf{C}$, область D содержит интервал (a, b) действительной прямой и на (a, b) функция $F(z)$ совпадает с аналитической функцией $f(x)$ действительного переменного x, то $F(z)$ называется аналитическим продолжением с действительной прямой.

Пусть функция $f_1(z)$ аналитична в области D_1, D_2 – такая область, что $D_1 \bigcap D_2 \neq \varnothing$; тогда либо не существует никакой функции, аналитической в D_2, совпадающей с $f_1(z)$ на $D_1 \bigcap D_2$, либо существует только одна такая функция $f_2(z)$, и тогда $f_2(z)$ называют *непосредственным аналитическим продолжением функции* $f_1(z)$ из D_1 в D_2. Аналогично, $f_1(z)$ в этом случае является непосредственным аналитическим продолжением функции $f_2(z)$ из D_2 в D_1, и каждая из этих функций называется *элементом аналитической функции*

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), z\in D_1,\\ f_2(z), z\in D_2. \end{cases}$$

Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны соответственно в областях D_1 и D_2, и $D_1 \cap D_2 = D'_{12} \cup D''_{12}$. Для всех точек $z \in D_{12}$ $f_1(z) = f_2(z)$, а в области D''_{12} функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ различны. Тогда в области $\hat{D}=D_1 \cup D_2 \setminus \bar{D}''_{12}$ определена аналитическая функция $\hat{F}(z)$:

$$\hat{F}(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1\setminus \bar{D}''_{12},\\ f_2(z), & z\in D_2\setminus \bar{D}''_{12}. \end{cases}$$

Эту функцию $\hat{F}(z)$, заданную на $\hat{D}$, можно аналитически продолжить на всю область $D_1 \cup D_2$ двумя способами:

$$F_1(z)=\begin{cases} \hat{F}(z), z\in \hat{D},\\ f_1(z), \ z\in D''_{12}, \end{cases} \quad F_2(z)=\begin{cases} \hat{F}(z), z\in \hat{D},\\ f_2(z), \ z\in D''_{12}. \end{cases}$$

Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ называют *однозначными ветвями* многозначной (в данном случае двузначной) аналитической функции $F(z)$.

Часто бывает удобно рассматривать функцию $F(z)$ как однозначную. Для этого изменяют область ее определения, вводя так называемую *риманову поверхность*. А именно, будем считать, что в нашем примере области D_1 и D_2 склеены во всех точках области D'_{12} и рассматриваются два экземпляра области D''_{12}: G_1 и G_2, которые называют *листами римановой поверхности R*:

$$R=\hat{D}\cup G_1 \cup G_2.$$

На этой римановой поверхности определена однозначная аналитическая функция

$$F(z)=\begin{cases}\hat{F}(z), & z\in\hat{D},\\ f_1(z), & z\in G_1,\\ f_2(z), & z\in G_2.\end{cases}$$

Рассмотрим основные способы построения аналитического продолжения.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ВДОЛЬ ЦЕПОЧКИ ОБЛАСТЕЙ

Пусть дана цепочка областей D_0, D_1 … , D_n, таких, что все пересечения $D_j \cap D_{j+1}$ не пусты и являются областями. Пусть также функции $f_0(z)$, $f_1(z)$, … , $f_n(z)$ таковы, что каждая функция $f_{j+1}(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением функции $f_j(z)$ из области D_j в область D_{j+1}, $j = 0, 1, \ldots\ n - 1$. Тогда естественно назвать функцию $f_n(z)$ аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ вдоль цепочки областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$. Такое продолжение единственно.

Полученный набор регулярных функций $f_0(z)$, $f_1(z)$, … , $f_n(z)$ определяет функцию $F(z)$:

$$F(z) = f_j(z),\ z \in D_j,\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Функция $F(z)$, вообще говоря, многозначная, так как цепочка областей может получиться такой, что области D_0 и D_n имеют общие точки, а функции $f_0(z)$ и $f_n(z)$ в этих точках $z \in D_0 \cap D_n$ принимают различные значения. В этом случае можно рассматривать однозначную функцию, определенную уже на римановой поверхности.

Итак, многозначная (вообще говоря) функция $F(z)$ составлена из однозначных элементов – регулярных функций $f_0(z)$, $f_1(z)$, … , $f_n(z)$.

Полной аналитической функцией $F(z)$ называют набор таких элементов, полученных из исходного элемента $f_0(z)$ аналитическим продолжением вдоль всевозможных цепочек областей, по которым продолжения возможны. Элементы, составляющие аналитическую функцию $F(z)$, принято называть *регулярными ветвями аналитической функции*.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ВДОЛЬ КРИВОЙ

Элементом в точке будем называть функцию $f(z)$, регулярную в некоторой окрестности этой точки. Два элемента будем называть *эквивалентными*, если они заданы в одной и той же точке и совпадают в некоторой окрестности этой точки. Пусть теперь на кривой γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1 задана непрерывная функция $\varphi(z)$. Пусть в каждой точке $\xi \in \gamma$ задан элемент $f_\xi(z)$, совпадающий с $\varphi(z)$ на дуге γ, содержащей точку ξ, тогда элемент $f_{z_1}(z)$ называют аналитическим продолжением вдоль γ элемента $f_{z_0}(z)$.

Отметим, что если $z = z(t)$, $0 \le t \le \beta$, – параметризация кривой γ, то функция $\varphi(z(t))$ – однозначная функция точки $z(t)$ кривой γ, но функция $\varphi(z)$ как функция точки $z \in \mathbf{C}$ может быть не однозначной, если γ имеет точки самопересечения. Ясно также, что если элемент $f_{z_0}(z)$ можно продолжить вдоль кривой γ, то его можно продолжить как вдоль некоторой цепочки областей, покрывающих γ, так и вдоль некоторой кривой $\gamma^{(1)}$, лежащей в объединении этих областей и имеющей те же начало и конец, что и кривая γ.

Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$. Продолжим его аналитически вдоль всех кривых с началом в точке z_0, по которым это продолжение возможно. Полученное множество элементов назовем аналитической функцией, порожденной элементом $f(z)$. Существует только одна аналитическая функция, порожденная данным элементом. Эквивалентные элементы порождают одну и ту же аналитическую функцию. Множество значений, которое принимает эта аналитическая функция в фиксированной точке, совпадает с множеством тех значений, которое принимают в этой точке ее элементы.

Важное значение в теории многозначных аналитических функций имеет следующая теорема, называемая *теоремой о монодромии.* Пусть D – односвязная область расширенной комплексной плоскости, и пусть элемент $f(z)$, заданный в точке z_0, допускает аналитическое продолжение по всем кривым, выходящим из точки z_0 и лежащим в области D. Тогда аналитическая функция $F(z)$, полученная в результате аналитического продолжения элемента $f(z)$ по всем таким кривым, регулярна в области D.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ

Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – аналитические функции в областях D_1 и D_2, и пусть области D_1 и D_2 имеют общий участок границы – кусочно-гладкую кривую Γ; пусть также $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны соответственно в $D_1 \cup \Gamma$ и $D_2 \cup \Gamma$. Тогда функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \Gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \cup \Gamma, \end{cases}$$

является аналитической в области $D_1 \cup \Gamma \cup D_2$, и ее естественно назвать аналитическим продолжением $f_1(z)$ из D_1 через границу Γ (соответственно $f_2(z)$ из D_2 через границу Γ).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Степенной ряд

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

с конечным радиусом сходимости $R_0 > 0$ определяет элемент $f_0(z)$ в точке a. Пусть точка $b \in K = \{z \in \mathbf{C}: |z - a| < R_0\}$. Разложим $f_0(z)$ по степеням $z - b$ в окрестности точки b. Для этого воспользуемся равенством

$$(z-a)^n = [(z-b)+(b-a)]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-a)^{n-k} (z-b)^k.$$

Тогда получим ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n$$

с радиусом сходимости R_1 и кругом сходимости

$$K_1 = \{z \in \mathbf{C}: |z-b| < R_1\}.$$

Ясно, что ряд $f_1(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением ряда $f_0(z)$ из круга K_0 в круг K_1.

Взяв элемент $f_1(z)$ в круге K_1 за исходный, можно строить его непосредственное продолжение и т. д.

Многозначная аналитическая функция может иметь особые точки, отличные от особых точек однозначной аналитической функции. Точка z_0 называется *изолированной точкой ветвления* функции $F(z)$, если функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0 и неоднозначна в этой окрестности.

11.1. Существует ли аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость следующих функций:

$$1)\ f(x)=\sqrt{x^2};\ 2)\ f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

11.2. Показать, что степенные ряды

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n};\qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)};$$

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!};\qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}z^{n!}$$

не продолжаемы за пределы круга сходимости.

11.3. Продолжить аналитически в комплексную плоскость функции, заданные на действительной оси:

1) $\sin x$; 2) $\cos x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$; 5) e^x;

6) $\operatorname{sh} x$; 7) $\operatorname{ch} x$; 8) $\operatorname{th} x$; 9) $\operatorname{arc\,tg} x$; 10) $\arcsin x$.

11.4. Доказать тождества в $\mathbf{C}$:

1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

2) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\sin z_2\cos z_1$;

3) $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\pm\sin z_1\sin z_2$;

4) $e^{z_1\pm z_2}=e^{z_1}e^{\pm z_2}$.

11.5. Доказать равенство Эйлера:

$$e^z=e^{\operatorname{Re} z}(\cos\operatorname{Im} z+i\sin\operatorname{Im} z).$$

11.6. Доказать равенства:

1) $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$; 2) $\sin z=\frac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})$;

3) $\sin z=-i\operatorname{sh}(iz)$; 4) $\cos z=\operatorname{ch}(iz)$.

11.7. Верны ли неравенства в $\mathbf{C}$:

1) $|\sin z|\le 1$; 2) $|\cos z|\le 1$: 3) $|\operatorname{ch} z|\ge 2$.

11.8. Решить уравнения относительно $z \in \mathbf{C}$ ($c \in \mathbf{C}$):

1) $\sin z = c$; 2) $\cos z = c$; 3) $e^z = c$.

11.9. Пусть элемент $f_0(z)$ аналитически продолжен вдоль кривой γ: $z = z(t)$, $0 \le t \le 1$, и пусть $f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(z - z_t)^n$ – элемент в точке $z(t) \in \gamma$.

Доказать, что радиус сходимости $r(t)$ степенного ряда $f_t(z)$ либо тождественно равен ∞, либо является непрерывной функцией от $t \in [0, 1]$.

11.10. Доказать, что аналитическое продолжение вдоль кривой можно получить аналитическим продолжением вдоль конечной цепочки кругов.

11.11. Доказать, что если элемент можно аналитически продолжить вдоль некоторой кривой, то его можно аналитически продолжить вдоль любой достаточно близкой кривой, имеющей те же концы. При этом в конечной точке кривой получатся одинаковые элементы.

11.12. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

является аналитическим продолжением функции $\ln x$ из интервала $0 < x < 2$ в круг $\{z: |z - 1| < 1\}$.

11.13. Доказать, что для построенной в задаче 11.12 функции $f(z)$ в круге $\{z: |z - 1| < 1\}$ справедлива формула

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi},$$

где интеграл берется по любой кривой $\gamma \subset \{z: |z - 1| < 1\}$, соединяющей точки 1 и z.

11.14. Доказать, что элемент $f(z)$ в круге $\{z: |z - 1| < 1\}$, построенный в задачах 11.12 и 11.13, можно аналитически продолжить вдоль любой кривой, проходящей через точку $z = 1$ и не содержащей точку $z = 0$, – это аналитическое продолжение задает интеграл $\int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, где интегрирование ведется по любой кривой, соединяющей точки 1 и z и не проходящей через точки 0 и ∞. Полученную таким образом функцию будем обозначать следующим образом:

$$\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

11.15. Доказать, что функция Ln z в $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ – многозначная.

11.16. Построить риманову поверхность для функции Arg z.

11.17. Доказать, что все значения функции Ln z даются формулой: $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$.

11.18. Построить риманову поверхность функции Ln z и выделить однозначные ветви этой функции.

11.19. Доказать, что справедливы формулы:

1) $\frac{d}{dz}\operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$; 2) $e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

11.20. Доказать, что точки 0 и ∞ являются изолированными точками ветвления функции Ln z.

11.21. Доказать, что если ω_1, ω_2 – любые из значений функции Ln z соответственно в точках z_1 и z_2, то их сумма есть одно из значений функции $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2)$.

11.22. Пусть $F(z) = z \ln z$, исходный элемент ln z задан в точке $z = 1$, $\ln 1 = 0$. Доказать, что точки $z = 0$, $z = \infty$ являются изолированными точками ветвления функции $F(z)$ бесконечного порядка.

11.23. Доказать, что функция

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

есть аналитическое продолжение в **C** функции $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

11.24. Доказать, что функция z^{α} аналитична в области $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

11.25. Доказать, что

$$\frac{d}{dz} z^{\alpha} = \alpha \frac{z^{\alpha}}{z},$$

где значения z^α в обеих частях равенства одни и те же.

11.26. Пусть кривая γ соединяет точки z_0, z_1 и не проходит через точки 0 и ∞. Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$ функции z^α, такой, что $f(z_0) = z_0^\alpha$. Доказать, что аналитическое продолжение этого элемента вдоль кривой γ в точке z_1 имеет значение

$$z_1^\alpha = z_0^\alpha \exp\left(\alpha \ln |z_1/z_0| + i\alpha\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z\right),$$

где $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ – приращение аргумента вдоль кривой γ.

11.27. Доказать, что $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\,\Delta_\gamma \arg z$, где γ проходит через точки 1 и z, $0 \notin \gamma$, $\infty \notin \gamma$.

11.28. Доказать, что все значения функции z^α при действительном α в точке $z = re^{i\varphi}$ даются формулой

$$z^\alpha = r^\alpha e^{i(\varphi + 2k\pi)\alpha}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

11.29. Пусть в точке $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ задано значение $z_0^\alpha = r_0^\alpha e^{i\alpha\varphi_0}$ функции z^α, и значение z_1^α – в точке z_1, полученное в результате аналитического продолжения вдоль кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_1. Доказать, что

$$z_1^\alpha = |z_1|^\alpha e^{i\alpha(\varphi_0 + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z)}.$$

11.30. Построить риманову поверхность функции z^α.

11.31. Доказать, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются логарифмическими точками ветвления функции z^α, если $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

11.32. Доказать, что в секторе $0 < \arg z < \beta \le 2\pi$ функция z^α распадается на регулярные ветви:

$$f_0(z) = |z|^\alpha e^{i\arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi;$$
$$f_k(z) = e^{i2\pi\alpha k} f_0(z), \ k \in \mathbf{Z}.$$

11.33. Доказать, что если a – иррациональное число или $\operatorname{Im} a \neq 0$, то функция z^a – бесконечнозначная.

11.34. Пусть $f(z)$ – элемент функции z^a в точке $z_0 \neq 0$, такой, что $f(z_0) = z_0^a$. Доказать, что

$$f(z) = z_0^a \sum_{k=0}^{\infty} C_a^k \frac{(z - z_0)^k}{z_0^k}.$$

11.35. Доказать, что если w_1 и w_2 – какие-либо значения функции z^a соответственно в точках z_1 и z_2, то $w_1 \cdot w_2$ – одно из значений функции z^a в точке $z_1 \cdot z_2$; кроме того, если w_0 – некоторое значение функции z^a в точке $z_1 \cdot z_2$, то существуют значения w_1 и w_2 функции z^a соответственно в точках z_1 и z_2, такие, что $w_0 = w_1 \cdot w_2$. Именно так понимается равенство $(z_1 \cdot z_2)^a = z_1^a \cdot z_2^a$.

11.36. Доказать, что функция $z^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$, в точке $z = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$, имеет значения

$$(z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

в частности,

$$z^{1/2} = \pm r^{1/2} e^{i\varphi/2}.$$

11.37. Доказать, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $z^{1/n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

11.38. Указать точки ветвления и их порядки для каждой из функций:

1) $z^{-1/2}$; 2) $[(z-1)(z+1)]^{1/2}$; 3) $z^{1/2} \sin z$.

11.39. Построить риманову поверхность функции z $1/n$, $n \leq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

11.40. Вычислить i^i.

11.41. Доказать, что $\sqrt{z^2}$ определяет две аналитические функции: $F_1(z) = z$ и $F_2(z) = -z$.

11.42. Доказать, что функция $\cos\sqrt{z}$ является аналитической, однозначной, целой функцией в $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

11.43. Доказать, что функция $z^{-1/2} \sin z^{1/2}$ является целой функцией.

11.44. Пусть $\operatorname{Arctg} z = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$, где интегрирование ведется по любому пути, не проходящему через точки $\pm\, i$. Доказать, что:

1) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz}$;

2) точки $z = \pm i$ – логарифмические точки ветвления;

3) tg (Arctg z) = z;

4) $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{Arctg} z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

11.45. Пусть $f_0(z)$ – такой элемент арктангенса в точке z = 0, что $f_0(0) = 0$. Доказать, что

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}, |z| < 1.$$

11.46. Пусть $\operatorname{Arcsin} z = \int_0^z \dfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, где интегрирование ведется по любому пути, не проходящему через точку ± 1. Доказать, что функция Arc sin z аналитична в $\mathbf{C}\backslash\{\pm 1\}$.

11.47. Пусть $f_0(z)$ – элемент функции Arc sin z, который задан по формуле

$$f_0(z) = \arcsin z = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$z \in D = \{z \in \mathbf{C}\backslash(-\infty, -1]\ [1, \infty)\}$, интеграл берется по любому пути, лежащему в D, ветвь корня выбрана так, что

$$\sqrt{1-\xi^2}\,\Big|_{\xi=0} = 1.$$

Доказать, что:

1) $f_0(z) = \arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2} z^{2n+1}$;

2) $\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$.

11.48. Пусть D – плоскость **C** с разрезом по кривой, соединяющей точки 0 и ∞.

1) Доказать, что в области D функция Ln z распадается на бесконечное число регулярных ветвей $f_k(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, и $f_1(z) - f_2(z) = 2k\pi i$, $z \in D$, где $f_1(z), f_2(z)$ – любые две ветви.

2) Доказать, что функция z^a распадается в D на регулярные ветви. Если a – действительное иррациональное число или $\operatorname{Im} a \neq 0$, то регулярных ветвей счетное число. Если же $a = p / q$, где p и q – взаимно простые целые числа и $q \geq 1$, то в D имеется ровно q различных регулярных ветвей z^a, и если $f_1(z)$, $f_2(z)$ – две различные ветви z^a, то

$$f_2(z) = e^{2k\pi ia} f_1(z), \quad z \in D, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

11.49. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ в области D (см. 11.48), такая, что $f(1) = 0$.

1) Вычислить $f(-2)$, $f(3)$, $f(-4)$.

2) Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 3$.

11.50. Доказать, что в области $\{z: 0 < |z| < \infty\}$ нельзя выделить регулярные ветви функций $\operatorname{Ln} z$, $\sqrt[n]{z}$ $(n > 1)$.

11.51. Пусть $D_a = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C}: z = re^{ia}, 0 \leq r < \infty, 0 < a < 2\pi\}$; тогда функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви. Пусть $f_a(z)$ – такая ветвь, что $f_a(1) = 1$. Вычислить $f_a(i)$:

1) $\pi / 2 < a < 2\pi$; 2) $0 < a < \pi / 2$.

11.52. Пусть функция $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в односвязной области D. Доказать, что функция

$$F(z) = \ln f(z), F(z_0) = \omega_0 \ \ (e^{\omega_0} = f(z_0))$$

регулярна в области D.

11.53. Пусть функция $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в односвязной области D. Доказать, что функция

$$F(z) = \sqrt{f(z)}, F(z_0) = \omega_0 \ (\omega_0^2 = f(z_0))$$

регулярна в D.

11.54. Доказать, что аналитическая функция $\sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви в области $\mathbf{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

11.55. Доказать, что функция $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$ распадается в области $\mathbf{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ на счетное число регулярных ветвей. Эти ветви можно задать формулами:

$$\left(\mathrm{Ln}\frac{z-1}{z+1}\right)_k = \ln\frac{z-1}{z+1} + 2k\pi i, \ln(-1) = \pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

11.56. Доказать, что аналитическая функция $\sqrt{z^2-1}$ распадается в области $\mathbf{C}\backslash[-1, 1]$ на две регулярные ветви.

11.57. Пусть $f(z)$ – одна из регулярных ветвей функции $\sqrt{z^2-1}$ (см. 11.56), такая, что $f(2)=\sqrt{3}$. Вычислить значение этой функции для вещественных $z \in \mathbf{R}$.

11.58. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ (см. 11.57) в окрестности точки $z = \infty$.

11.59. Доказать, что аналитическая функция $\mathrm{Ln}\dfrac{1-z}{1+z}$ распадается на счетное число регулярных ветвей $f_k(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, в области $\mathbf{C}\backslash[-1, 1]$. Эти ветви задаются формулами:

$$f_k(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i\Delta\arg_\gamma\frac{1-z}{1+z} + i\operatorname{Im} z_0 + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где γ – простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в области $\mathbf{C}\backslash[-1, 1]$.

11.60. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}\dfrac{1-z}{1+z}$ (см. 11.59), такая, что $f(0) = 0$. Вычислить значения $f(z)$ для действительных и чисто мнимых значений z.

11.61. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию $f(z)$ (см. 11.60).

11.62. Доказать, что аналитическая функция $\sqrt[3]{z/(1-z)}$ распадается в области $\mathbf{C} \setminus [0, 1]$ на три регулярные ветви.

11.63. Пусть дан алгебраический полином

$$P_n(z) = a(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n), a \neq 0,$$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ – различные его корни, и $R > \max\limits_{1\le k\le n} |z_k|$.

1) Доказать, что аналитическая функция $\sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается на n регулярных ветвей в кольце $\{z\colon R < |z| < \infty\}$.

2) Пусть D – внешность объединения отрезков, соединяющих фиксированную точку z_0 с точками $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Доказать,

что аналитическая функция $\sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается в D на n регулярных ветвей.

11.64. Доказать, что функция $\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$ распадается в области $\mathbf{C} \setminus \{[-2,-1] \cup [1,2]\}$ на две регулярные ветви.

11.65. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – различные точки из $\mathbf{C}$, D – плоскость с разрезами вдоль простых не пересекающихся кривых γ_j, соединяющих точки z_{2j-1}, z_{2j}. Доказать, что аналитическая функция $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{2n})}$ распадается в D на две регулярные ветви.

11.66. Доказать, что функция $f(z)=\sqrt[4]{z(z-1)^3}$ регулярна в $\mathbf{C}\setminus[0,1]$. Вычислить $f(-1), f'(-1), f''(-1)$.

11.67. Доказать, что в области $\{z\colon 1<|z|<\infty\}$ нельзя выделить регулярные ветви функции $\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

11.68. Доказать, что точки 0 и ∞ являются точками ветвления порядка n аналитических функций:

$$1)\ \frac{1}{\sqrt[n]{z}};\quad 2)\ \sqrt[n]{z}+e^z;\quad 3)\ \frac{1}{1+\sqrt[n]{z}};\quad 4)\ \sqrt[n]{z}\sin z.$$

11.69. Доказать, что точки 0 и ∞ являются логарифмическими точками ветвления аналитических функций:

$$1)\ z+\operatorname{Ln} z;\ 2)\ \frac{\operatorname{Ln} z}{z-1};\ 3)\ \frac{1}{\operatorname{Ln} z};\ 4)\ \frac{1}{\operatorname{Ln} z+1};\ 5)\ e^z\operatorname{Ln} z.$$

11.70. Пусть функция $f(z)$, не равная тождественно нулю, либо регулярна в точке a и $f(a)=0$, либо имеет полюс в точке a.

Доказать, что:

1) точка a является логарифмической точкой ветвления функции $\operatorname{Ln} f(z)$;

2) точка a является точкой ветвления порядка n функции $\sqrt[n]{f(z)}$.

11.71. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична всюду в $\mathbf{C}$ и $f(z)\neq 0$ для любого $z\in\mathbf{C}$, то $f(z)=e^{\varphi(z)}$, где $\varphi(z)$ аналитична всюду в $\mathbf{C}$.

11.72. Пусть точка $z = z_0$ – точка ветвления конечного порядка для функций $f(z)$ и $g(z)$. Доказать, что для функций $f \pm g$, $f \cdot g$ точка $z = z_0$ является или точкой ветвления конечного порядка, или изолированной особой точкой однозначного характера.

11.73. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^{n}}\right)$ в областях $\{z: |z| < 1\}$ и $\{z: |z| > 1\}$ представляет собой две аналитические функции, не являющиеся аналитическим продолжением друг друга.

11.74. Доказать, что:

1) $\operatorname{Arccos} z = i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

2) $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$;

3) $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$.

11.75. Выделить однозначные ветви многозначных функций в указанной области D:

1) $\operatorname{Ln}(1-z^2)$, $D = \{z: z \neq 1, -1, \infty\}$;

2) $\sqrt[3]{1+z^2}$, $D = \{z: z \neq i, -i, \infty\}$;

3) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$, $D = \{z: z \neq i, -i, 1, -1\}$.

11.76. Пусть функция $f(z)$ аналитична в D, $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Будет ли в этой области D многозначная функция $\sqrt{f(z)}$ иметь однозначные аналитические ветви?

11.77. Пусть D – односвязная область, не содержащая точек $z = 0$ и $z = \infty$, но точка $z = 1 \in D$. Сколько различных ветвей $f(z)$ можно выделить для многозначных функций:

1) $(z-1)\operatorname{Ln} z$, $f(1) = 0$; 2) z^z, $f(1) = 1$; 3) z^z, $f'(1) = 1$.

11.78. Допускают ли следующие многозначные функции выделение однозначных аналитических ветвей в области D:

1) $\sqrt[3]{\frac{z+1}{z+i}}$, $D = \{z: 1 < |z| < \infty\}$;

2) $2\operatorname{Ln}(z+1) - \operatorname{Ln}(z-i)$, $D = \{z: 1 < |z| < \infty\}$;

3) $\sqrt[3]{1-z^5}$, $D=\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$;

4) $\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$, $D=\{z\colon \operatorname{Re} z>0, |z-3|>5/2\}$.

11.79. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z = 0 обе ветви многозначной функции:

1) $\sqrt{1-z^2}$; 2) $(1-z^2)^{-1/2}$.

11.80. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z = 0 функции:

1) arctg z; 2) ln(1 + z).

11.81. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию:

$$f(z)=\ln\frac{z+a}{z-a},\ \ln 2a>0.$$

11.82. Разложить все аналитические ветви указанной функции в ряд Лорана по степеням z:

1) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z+2)}$, $D=\{z\colon 1<|z|<2\}$;

2) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z+1)^2}{z^2+4}$, $D=\{z\colon |z|>2\}$.

11.83. Пусть $f(z)$ – аналитическая ветвь функции $\sqrt[3]{z/(1-z)}$ в $\mathbf{C}\setminus[0, 1]$, такая, что $f(1/2+i)>0$. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в области $\{z\colon |z|>1\}$.

11.84. Найти особые точки всех аналитических ветвей функции:

1) $\dfrac{\operatorname{Arcctg}\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh}\sqrt{z}}$.

11.85. Допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$:

1) ln z, $a=0$; 2) ln (1/(z − 1)), $a\neq\infty$, $a=\infty$;

3) ln ((z − 1)/(z + i)), $a=\infty$; 4) $z^a=e^{a\ln z}$;

5) $\sqrt{z(z-1)^2}$, $a=\infty$; 6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $a=0$;

7) arcsin z, $a=0$; 8) $\sqrt{\pi/2-\arcsin z}$, $a=1$.

11.86. Пусть D – комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Показать, что указанные функции аналитичны в D, и определить характер изолированной точки ветвления $z = \infty$:

$$1)\ \sqrt{z(z^2-1)};\quad 2)\ \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1});\quad 3)\ \mathrm{Ln}\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}.$$

11.87. При каких значениях z значения W(z) на всех ее листах римановой поверхности над z-плоскостью одинаковы:

1) $W(z)=(z^2-9)\sqrt{z}$; 2) $W(z)=\sin z+(z^2+4)\mathrm{Ln}\, z$;

3) $W(z)=\sin z+(z^2+4)^2\,\mathrm{Ln}\, z$.

11.88. Продолжить аналитически в **C** функцию sin (z) / z.

11.89. Продолжить аналитически функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ в $\mathbf{C}\setminus\{1\}$.

11.90. Функцию $F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt, x>0$, продолжить аналитически в $\mathbf{C}\setminus(-\infty, 0)$.

11.91. Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и $|f(t)| \le \le c(1+t)^{-a}$, $0 \le t < +\infty$, $a > 0$. Доказать, что интеграл типа Коши

$$f(z)=\int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

является аналитической функцией в $\mathbf{C}\setminus[0, \infty)$.

11.92. Показать, что гамма-функцию Эйлера $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ где Re z > 0 и $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$, можно аналитически продолжить в $\mathbf{C}\setminus\{0, -1, -2, \ldots\}$ следующим образом:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

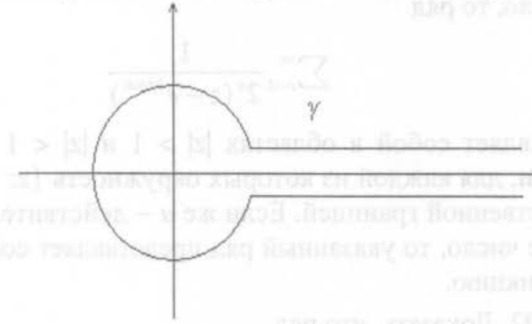
11.93. Доказать, что справедливы следующие утверждения:

1) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$; 2) $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$;

3) $\Gamma(z)^{-1}$ – целая функция; 4) $\Gamma(z)=\frac{1}{e^{i2\pi z}-1}\int_\gamma e^{-\xi}\xi^{z-1}d\xi$,

5) $\Gamma(z)^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \xi^{-z}e^{\xi}d\xi$.

где γ – контур, изображенный на приведенном ниже рисунке.



11.94. Продолжить аналитически в $\mathbf{C}\backslash[-i, i]$ функцию

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=2}\frac{d\xi}{(\xi^2+1)(\xi-z)},\quad |z|<2.$$

11.95. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полукольце $\{z\colon \rho<|z|<R,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$, непрерывна в его замыкании и $\mathrm{Im}\, f(z)=0$ для действительных z, $-R<z<-\rho$, и $\mathrm{Re}\, f(z)=0$ для действительных z, $\rho<z<R$. Доказать, что $f(z)$ может быть аналитически продолжена в кольцо $\{z\colon \rho<|z|<R\}$.

11.96. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полукольце $\{z\colon \rho<|z|<R,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$, непрерывна в его замыкании и принимает действительные значения на интервалах $(-R, -\rho)$ и (ρ, R) действительной оси. Доказать, что функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена на все кольцо $\{z\colon \rho<|z|<R\}$.

11.97. Найти области, на которые отображаются с помощью функции $\omega=e^z$:

1) прямоугольник $0<x<a,\ 0<y<b$;

2) полуполоса $0<x<a,\ y>0$;

3) полоса $0<x\le a$.

11.98. Найти области, на которые отображаются с помощью функции $\omega=\cos z$:

1) полоса $-\pi/2<x<\pi/2$; 2) полоса $0<x<2\pi$.

11.99. Найти область, на которую с помощью функции $\omega=\mathrm{tg}\, z$ отображается полоса $0<x<\pi/2$.

11.100. Построить риманову поверхность, на которую функция $\omega=e^{z^{-1}}$ отображает z-плоскость $\mathbf{C}$.

11.101. Доказать, что если a – действительное иррациональное число, то ряд

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z - e^{2\pi nai})}$$

представляет собой в областях $|z| > 1$ и $|z| < 1$ аналитические функции, для каждой из которых окружность $\{z\colon |z| = 1\}$ является естественной границей. Если же a – действительное иррациональное число, то указанный ряд представляет собой рациональную функцию.

11.102. Доказать, что ряд

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z + n}, \quad n^z = e^{z \ln n},$$

сходится при $\operatorname{Re} z > 1$ и его сумма – аналитическая функция с естественной границей $\operatorname{Re} z = 1$.

11.103. Доказать, что функция

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$$

аналитична при $\operatorname{Re} z > 0$ и имеет прямую $\operatorname{Re} z = 0$ своей естественной границей.

11.104. Доказать, что функцию

$$f(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

где $a_n = (-1)^{n+1}$, $\lambda_{2k-1} = 2k$, $\lambda_{2k} = 2k + e^{-2k}$, $k = 1, 2, \ldots$, можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -1$.

11.105. Доказать, что функцию

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} e^t \sin e^t \, dt,$$

определенную в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -1$.

11.106. В каких областях $\mathbf{C}$ справедливы формулы:

1) $\int_0^{\infty} t^{z-1} \cos t \, dt = \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}$; 2) $\int_0^{\infty} t^{z-1} \sin t \, dt = \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}$.

Глава 12

ВЫЧЕТЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (в том числе и $z_0 = \infty$) называется значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\xi)d\xi \equiv \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z),$$

где интегрирование ведется по замкнутому кусочно-гладкому контуру Жордана, содержащему внутри себя точку z_0 и не содержащему других особых точек функции $f(z)$. При этом интегрирование ведется в положительном направлении относительно области, содержащей точку z_0. Значение этого интеграла в силу теоремы Коши не зависит от контура интегрирования, обладающего указанными свойствами. Поэтому при вычислении вычета в точке $z_0 \neq \infty$ можно считать, что γ – окружность $\{z\colon |\xi - z_0| = \delta\}$ достаточно малого радиуса, а в точке $z_0 = \infty$ – окружность $\{\xi\colon |\xi| = R\}$ достаточно большого радиуса.

Значение вышеуказанного интеграла в случае $z_0 \neq \infty$ равно коэффициенту a_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$, а в случае $z_0 = \infty$ равно $-a_{-1}$, где a_{-1} – коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Если точка $z_0 \neq \infty$ есть полюс порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D (быть может, и многосвязной), кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$, и непрерывна в $\overline{D}$, то

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum\nolimits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

где ∂D есть замкнутый кусочно-гладкий контур Жордана в случае, когда область D является односвязной, и объединение конечного числа таких контуров, когда область D является многосвязной.

Если функция $f(z)$ аналитична всюду на $\mathbf{C}$, кроме конечного числа точек $z_0 = \infty, z_1, \ldots, z_n$, то справедлива формула

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

При вычислении несобственных интегралов функций действительного переменного существенную роль играет

Лемма Жордана.

1. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области

$$D = \{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq a\} \ (\{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \leq a\})$$

и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in D$. Если $m > 0$ $(m < 0)$, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)\, dz = 0,$$

где γ_R – дуга окружности $\{z: |z| = R\}$, лежащая в этой же области D.

2) Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области

$$D = \{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Re} z \geq a\} \ (\{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Re} z \leq a\})$$

и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Если $t > 0$ $(t < 0)$, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-tz} f(z)\, dz = 0,$$

где γ_R–дуга окружности $\{z: |z| = R\}$, лежащая в этой же области D.

Справедлив *принцип аргумента* аналитической функции: если функция $f(z)$ аналитична в замыкании $\bar{D}$ односвязной ограниченной области D (т. е. $f(z)$ аналитична в области G и $\bar{D} \subset G$) всюду, кроме конечного числа полюсов $\beta_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и имеет конечное число нулей $\alpha_k \in D$, причем $f(z) \neq 0$ всюду на ∂D, то приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль контура $\gamma = \partial D$ при однократном обходе области в положительном направлении равно $2\pi(N - P)$, где N – полное число нулей (с учетом кратности), а P – полное число полюсов (с учетом кратности) функции $f(z)$ в области D, т. е. $\operatorname{Var}[\arg f(z)]\big|_{z\in\gamma} = 2\pi(N - P)$.

При этом доказывается, что

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg f(z)]\Big|_{z\in\gamma} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Интеграл в последнем равенстве равен сумме вычетов функции $f'(z)/f(z)$ в области D.

Вычет функции $f'(z)/f(z)$ называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$, поскольку

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}(\operatorname{Ln} f(z)).$$

Непосредственным следствием принципа аргумента является

Теорема Руше. Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в замыкании $\overline{D}$ ограниченной односвязной области D и на границе ∂D всюду имеет место неравенство

$$|f(z)|\big|_{z\in\partial D} > |\varphi(z)|\big|_{z\in\partial D},$$

то внутри области D функции f, $f+\varphi$, $f-\varphi$ имеют одинаковое число нулей (с учетом кратности).

Теорема Гурвица. Пусть задана последовательность функций $\{f_n(z)\}$, ограниченных в области D. Пусть эта последовательность равномерно сходится внутри области к функции $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Тогда для любого контура $\Gamma \subset D, D_\Gamma \subset D$ и не проходящего через нули $f(z)$, существует число $n_0 = n_0(\Gamma)$, такое, что для любого $n \geq n_0(\Gamma)$ число нулей $N_{f_n} = N_f$ в области D_Γ.

12.1. Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots.$$

Найти $\operatorname{res} f^2(z)$ в точке $z_0 = \infty$.

12.2. Доказать, что если $z_0 \neq \infty$ – простой полюс функции $\varphi(z)/\psi(z)$, т. е. $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \varphi(z)/\varphi(z) = \varphi(z_0)/\varphi'(z_0).$$

12.3. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке $z_0 \neq \infty$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль второго порядка. Найти $\operatorname{res}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в точке z_0 .

12.4. Найти res $(\varphi(z) f(z))$ в точке z_0, если функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, а функция $f(z)$ имеет в этой точке полюс порядка k и главную часть лорановского разложения следующего вида:

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0}+...+\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}.$$

12.5. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$, то справедливы формулы:

1) $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z));$

2) $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -g'(0)$, где $g(z) = f(1/z)$.

12.6. Найти res $f'(z) / f(z))$ в точке $z_0 \neq \infty$, если:

1) z_0 – нуль порядка n аналитической функции $f(z)$;

2) z_0 – полюс порядка p функции $f(z)$.

12.7. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в точке $z_0 \neq \infty$. Найти $\operatorname{res}\big(\varphi(z)\cdot f'(z)/f(z)\big)$ в точке z_0, если:

1) z_0 – нуль порядка n аналитической функции $f(z)$;

2) z_0 – полюс порядка p функции $f(z)$.

12.8. Найти res $f(\varphi(z)))$ в точке $z_0 \neq \infty$, если функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi'(z_0) \neq 0$, а функция $f(w)$ имеет в точке $w_0 = \varphi(z_0)$ полюс первого порядка с вычетом, равным R.

12.9. Найти вычеты относительно всех изолированных особых точек следующих функций:

1) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$; 2) $\dfrac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}, m = 2,3, ...;$ 3) $\dfrac{1}{z^5 - z^7}$;

4) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}, n \in \mathbf{N}$; 5) $(e^z-1)^{-1} - z^{-1}$; 6) $e^{\frac{1}{1-z}}$; 7) $\dfrac{1}{1-e^z}$;

8) $\dfrac{1}{\sin z}$; 9) $\dfrac{1}{\cos z - 3}$; 10) $z^n \sin\dfrac{1}{z}, n \in \mathbf{N}$; 11) $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$;

12) $\sin z \sin(1/z)$; 13) $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$; 14) $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$;

15) $\dfrac{1}{\sin(z/(z+1))}$; 16) $e^{1/z}$; 17) $e^{z+1/z}$; 18) $\operatorname{tg} z$;

19) $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}, n \in \mathbf{N}$; 20) $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

12.10. Найти вычеты в указанных точках однозначных ветвей следующих многозначных функций:

1) $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}, z=1$; 2) $\dfrac{z^\alpha}{1-\sqrt{z}}, z=1$; 3) $\dfrac{z}{2+\sqrt{5-z}}, z=1$;

4) $\dfrac{z+3}{4\pi i-\ln(1+z)}, z=0$; 5) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}, z=\infty$;

6) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}, z=\infty$; 7) $\sqrt{(z-a)(z-b)}, z=\infty$;

8) $z^n\operatorname{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}, z=0, z=\infty$; 9) $e^z\operatorname{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}, z=\infty$;

10) $\dfrac{\sqrt[3]{2z^2-z^3}}{z+3}, z=\infty$.

12.11. Вычислить интегралы по замкнутому контуру γ, считая направление обхода положительным:

1) $\oint_\gamma \dfrac{dz}{z^4+1}, \gamma:\{z:|z-1|=1\}$;

2) $\oint_\gamma \dfrac{dz}{z^4+1}, \gamma:\{z:x^2-xy+y^2+x+y=0\}$;

3) $\oint_\gamma \dfrac{z^3dz}{2z^4+1}, \gamma:\{z:|z|=1\}$;

4) $\oint_\gamma \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}, \gamma:\{z:|z|=2\}$;

5) $\oint_\gamma \dfrac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}, \gamma:\{z:|z|=4\}$;

6) $\oint_\gamma \sin\dfrac{1}{z}dz, \gamma:\{z:|z|=r\}$;

7) $\oint_\gamma \sin\dfrac{zdz}{z+1}, \gamma:\{z: |z|=3\};$

8) $\oint_\gamma \dfrac{z\,dz}{e^{z^2}-1}, \gamma:\{z: |z|=4\};$

9) $\oint_\gamma \dfrac{z\,dz}{\sin z\cdot(1-\cos z)}, \gamma:\{z: |z|=5\};$

10) $\oint_\gamma \dfrac{e^{1/(z-1)}dz}{z-2}, \gamma:\{z: |z|=3\};$

11) $\oint_\gamma (2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}dz, \gamma:\{z: |z|=3\}.$

12.12. Доказать, что если функция $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ является рациональной относительно своих аргументов $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, то

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = 2\pi\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\tilde{R}(z),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – особые точки функции $\tilde{R}(z)$, лежащие в круге $\{z\in : |z|<1\}$, а функция $\tilde{R}(z)$ имеет вид:

$$\tilde{R}(z) = z^{-1}R\left(\frac{1}{2}(z+1/z), \frac{1}{2i}(z-1/z)\right)$$

и является рациональной относительно z.

12.13. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}, a>1;$ 2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}, a>b>0;$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi};$ 4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+a^2-2a\cos\varphi}, a\neq\pm1;$

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi, n\in\mathbf{Z};$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1-a\sin^2\varphi}, 0<a<1;$ 7) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 2\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+\mathrm{a}^2}, |a|<1;$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^a\varphi\,\cos b\varphi\,\mathrm{d}\varphi, b>a>-1;$

9) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2\alpha}{\sin\varphi-\sin a}\right)^n e^{in\varphi}d\varphi, 0<a<\pi/2, n\in\mathbf{N};$

10) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\varphi\, d\varphi}{1-2a\sin\varphi+a^2}$, $|a|<1, n\in\mathbf{N}$;

11) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx\cos kx}{\sin x}dx$, $k, n\in\mathbf{N}$;

12) $\int_0^{2\pi}\frac{q\sin x\sin kx}{1-2q\cos x+q^2}dx$, $|q|<1,\ k\in\mathbf{N}$;

13) $\int_0^{2\pi}\frac{(1-q^2)\cos kx}{1-2q\cos x+q^2}dx$, $|q|<1,\ k\in\mathbf{N}$;

14) $\int_0^{2\pi}\frac{(1-q\cos x)\cos kx}{1-2q\cos x+q^2}dx$, $|q|<1,\ k\in\mathbf{N}$;

15) $\int_0^{2\pi}\ln(1-2q\cos x+q^2)\cos kx\, dx$, $|q|<1,\ k\in\mathbf{N}$.

12.14. Вычислив $\lim\limits_{n\to\infty}\oint_{\gamma_n}\frac{zdz}{a-e^{-iz}}$, где γ_n – прямоугольный контур, соединяющий точки $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, n), $(-\pi, n)$, показать, что

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\, dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a}\begin{cases}\ln(1+a), & 0<a<1,\\ \ln\dfrac{1+a}{a}, & a>1.\end{cases}$$

12.15. Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $\operatorname{Im} z\geq 0$, аналитична при $\operatorname{Im} z>0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2,\ldots, z_n$ и $zf(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z\geq 0$. Доказать, что

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum\nolimits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k}f(z).$$

12.16. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; 2) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$; 3) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n\in\mathbf{N}$;

4) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a)^2}$, $a>0$; 5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a, b>0$;

6) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^n+1}$, $n\geq 2, n\in\mathbf{N}$; 7) $\int_0^{\infty}\frac{x^n dx}{x^{2n}+1}$, $n\geq 2, n\in\mathbf{N}$;

8) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbf{N}$; 9) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(bx^2+a)^4}$, $a, b > 0$;

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(bx^2+a)^n}$, $a, b > 0, n \in \mathbf{N}$;

11) $\int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{x^n+1}$, $n > m+1$, $n, m \in \mathbf{N}$;

12.17. Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $\operatorname{Im} z \geq 0$, аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Доказать, что при $a > 0$

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k}[e^{iaz} f(z)].$$

Указание. Использовать лемму Жордана.

12.18. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-2x+10}$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^4+1}$;

3) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$; 4) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x\, dx}{x^2}$;

5) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x\, dx}{x^3}$; 6) $\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{\sin x\, dx}{x}$;

7) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax\, dx}{x(x^2+b^2)^i}$, $i = 1, 2$; 8) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$;

9) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a, b > 0$;

10) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos ax}{x^2} dx$, $a > 0$;

11) $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$; 12) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$;

13) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$; 14) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx$.

12.19. Вычислить интегралы:

1) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz,\ t>0;$ 2) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ze^{tz}}{z^2+1} dz,\ \sigma>0,\ 0<t<1;$

3) $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tz}}{(z^2-1)^2} dz,\ t>0;$ 4) $\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z\cos zt}{(z+1)^2} dz,\ t>0;$

5) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^z}{z} dz,\ 0<a<1,\ \sigma>0;\ a>1, \sigma>0;$

6) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^z}{z^2} dz, \sigma>0;$

7) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{dz}{a^z \sin\pi z},\ 0<a<1,\ 0<\sigma<1;$

8) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^z}{z^{n+1}} dz,\ \sigma>0,\ t>0,\ n\in\mathbf{N};$

9) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} dz,\ \sigma>0,\ t>0,\ n\in\mathbf{N}.$

12.20. Доказать, что при $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} dx = 0.$$

12.21. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}.$$

Указание. Интегрировать функцию $\frac{\log^2 z}{1+z^2}$ вдоль полукруглого контура.

12.22. Пусть функция $f(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и аналитична на действительной прямой, кроме простых полюсов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Доказать, что при $a>0$

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\left\{\sum\nolimits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k}(e^{iaz}f(z)) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=b_k}(e^{iax}f(z))\right\},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения относительно точек b_k и ∞.

12.23. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaxz}}{x}dx$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)}, a>0, \xi\in\mathbf{R}$;

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-\xi}, \xi\in\mathbf{C}$; 5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^3+1}dx$;

6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-\xi)(x-z)},\ \xi, z\in\mathbf{C}, z\neq\xi$;

7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x-\xi)(x-z)},\ \operatorname{Im}\xi>0, \operatorname{Im}z>0, z\neq\xi$;

8) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\operatorname{ch}z-\operatorname{ch}\xi}{z-\xi}dz,\ -\infty<\sigma<\infty,\ \xi\in\mathbf{C}$;

9) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}z-\operatorname{sh}\xi}{z-\xi}\right)^2dz,\ -\infty<\sigma<\infty, \xi\in\mathbf{C}$;

10) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}z-ch\xi}{z-\xi}\right)^2dz,\ -\infty<\sigma<\infty, \xi\in\mathbf{C}$;

11) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{iax}}{x^2}dx, a\in\mathbf{R}$;

12) $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{t^z-t^\xi}{z-\xi}\right)^3dz,\ -\infty<\sigma<\infty, 0<t<1, \xi\in\mathbf{C}$;

12.24. Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости. Доказать справедливость следующих формул:

1) $\operatorname*{res}_{z=\infty}\left(f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right)=\int_a^b f(z)dz,$

где a и b – произвольные комплексные числа;

2) $\underset{z=\infty}{\mathrm{res}}\left(f(z)\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)^2\right)=2\int_a^b f(x)\ln\dfrac{b-x}{x-a}dx,$

где a и b – произвольные комплексные числа и $a<b$;

3) $\underset{z=\infty}{\mathrm{res}}\left(f(z)\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)^c\right)=\dfrac{\sin c\pi}{\pi}\int_a^b f(x)\left(\dfrac{b-x}{x-a}\right)^c dx,$

где $-1<c<1$, a и b –действительные числа и $a<b$.

12.25. Вычислить интегралы от многозначных функций (для всех однозначных ветвей):

1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+e^{i\varphi}}\,d\varphi;$ 2) $\oint_{|z-1|=1/2}\dfrac{dz}{\ln(z-2)+i\pi};$

3) $\oint_{|z+1|=1/2}\dfrac{\cos z dz}{\ln z+i\pi};$ 4) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{arctg} z}{z}dz;$

5) $\oint_{|z|=1}\dfrac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}};$ 6) $\oint_{|z|=2}\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}dz;$

7) $\oint\limits_{|z|=2(|a|+|b|)}\sqrt{(z-a)(z-b)}dz;$ 8) $\oint\limits_{|z|=2(|a|+|b|)}\dfrac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}};$

9) $\oint\limits_{|z|=2(|a|+|b|)} z\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}\ln\dfrac{z-a}{z-b}dz, \ln\dfrac{z-a}{z-b}\Big|_{z=\infty}=0.$

12.26. Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом по положительной части действительной прямой, кроме конечного числа изолированных особых точек a_1, a_2, …, $a_n\notin\overline{\mathbf{R}}_+$ и непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точки $=0$. Пусть, кроме того,

$|f(z)|\le C_\delta|z|^{-\delta}$ для любого $\delta>0$ при $z\to 0$,

$|f(z)|\le C'_\delta|z|^{-1+\delta}$ для любого $\delta>0$ при $z\to\infty$.

Доказать, что

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)dx=-\pi\frac{e^{i\pi\alpha}}{\sin\alpha\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{\mathrm{res}}\,[z^{\alpha-1}f(z)],$$

если $0<\alpha<1$ и $x^{\alpha-1}>0$ при $x>0$.

12.27. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+\lambda}dx, 0<a<1, \lambda>0;$

2) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(x+1)(x+2)...(x+n)}dx, 0<a<n;$

3) $\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1+x^2}, -1<p<1;$ 4) $\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^2}dx, -1<p<3;$

5) $\int_0^\infty \frac{x^p dx}{x^2+2\cos\lambda+1}, |p|<1, |\lambda|<\pi;$

6) $\int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)\,dx}{1+x^2};$ 7) $\int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)\,dx}{x^2+4};$

8) $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^n}, n,m\in\mathbf{N}, n>m+1.$

12.28. 1) Доказать, что $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\pi/\sin a\pi$, $0<a<1$, где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера.

2) Доказать формулу из п. 1) с помощью интеграла из задачи 12.16 (п. 11) и приближения любого действительного числа $a\in(0, 1)$ дробью вида $(m+1)/n$, где $m, n\in\mathbf{N}$.

12.29. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx, a>0, 0<p<1;$

2) $\int_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx, a>0, |p|<1;$

3) $\int_0^\infty \cos(x^p)\,dx, p>1;$ 4) $\int_0^\infty \sin(x^p)\,dx, p>1;$

5) $\int_0^\infty e^{-t\cos\lambda}\cos(t\sin\lambda)\,dt, |\lambda|<\pi/2;$

6) $\int_0^\infty e^{-t\cos\lambda}\sin(t\sin\lambda)\,dt, |\lambda|<\pi/2.$

12.30. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

1) $\int_0^\infty \frac{e^{px}dx}{1+e^x}, 0<p<1;$ 2) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4-1};$ 3) $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-1};$

4) $\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1-x}, -1<p<0;$ 5) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}\,dx}{1-e^x}, 0<p<1;$

6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}\,dx}{1-e^{2x}}, 0<p<2$; 7) $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\ln x)\,dx}{x^2-1}$;

8) $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\ln x)}{x-1}\right)^2 dx$; 9) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)(e^x+a)}, 0<a<2$;

10) $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{\operatorname{sh}x}$, $|\operatorname{Im}a|<1$;

12.31. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}, a>0$; 2) $\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2}, \operatorname{Re}a>0$;

3) $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{x+a}dx,\ 0<p<1, a>0$;

4) v.p.$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{x-a}dx,\ 0<p<1, a>0$;

5) $\int_0^1\ln\frac{1-x}{x}\frac{dx}{x+a}, a>0$; 6) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)},\ a>0$;

7) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)},\ a>0$;

8) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2},\ a>0$; 9) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x+a)^2},\ a>0$;

10) $\int_0^{\infty}\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

12.32. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}dx, -1<p<2$;

2) $\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx, -1<p<2$;

3) $\int_0^1 x^a(1-x)^{1-a}\,dx, -1<\operatorname{Re}a<2$;

4) $\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^2}dx, -1<p<2$;

5) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a}$, $|p|<1, a>0$;

6) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2}$, $|p|<1, a>0$;

7) $\int_0^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx, -1<p<2$;

8) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}}{b-x}dx,\ 0<p<1,\ b\in\mathbf{C}, b\neq 0,1$;

9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, n=2,3,\ldots$; 10) $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\ln\frac{x}{1-x}dx$;

11) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}dx.$

12.33. Доказать приведенную ниже *формулу Иенсена*. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $\{z: |z|<R\}$, $f(0)\neq 0$, $r_1, r_2, \ldots,$ – модули нулей $f(z)$ в этом круге, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n \le r \le r_{n+1}$ справедливо:

$$\log|f(0)| + \sum_{k=1}^n \log\frac{r}{r_k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r,\theta)|\,d\theta.$$

12.34. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $\{z: |z|\le R\}$, $f(0)\neq 0$, $f(z)\neq 0$ при $|z|=R$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – нули функции $f(z)$ в круге $\{z: |z|<R\}$ с учетом кратности, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – полюса с учетом их кратности. Доказать, что справедлива формула

$$\log|f(0) + \sum_{k=1}^n \log\frac{R}{|a_k|} - \sum_{k=1}^m \log\frac{R}{|b_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(R,\theta)|\,d\theta.$$

12.35. Доказать, что для всех $|z|\le\rho$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\rho e^{i\theta}-z|\,d\theta = \log\rho.$$

12.36. Пусть функция $f(z)$ аналитична в открытом круге $\{z: |z|<\rho\}$ и $f(z)\neq 0$ всюду при $|z|\le\rho$, кроме точки $z_0=\rho e^{i\theta_0}$, причем $f(z)=(z-z_0)^k F(z)$, где функция $F(z)$ непрерывна при $|z|\le\rho$ и $\lim\limits_{z\to z_0} F(z)\neq 0, \infty$. Доказать, что справедлива *формула Иенсена*:

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho,\theta)|\,d\theta.$$

12.37. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z: |z|<\rho\}$, непрерывна в замкнутом круге $\{z: |z|\le\rho\}$ и обращается в нуль только при $z=0$ с кратностью m, то

$$\log\frac{|f^{(m)}(0)|}{m!}+m\log\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta.$$

12.38. С помощью теоремы Руше доказать основную теорему алгебры: любой многочлен $P_n(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$, $a_n\neq 0$, с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, учитывая их кратность.

12.38.1. Доказать теорему Гурвица.

12.39. Пусть $P_n(z)=az^n+z+1$, где $a\in\mathbf{C}$, $n\ge 2$. Доказать, что $P_n(z)$ имеет хотя бы один нуль в круге $\{z: |z|\le 2\}$.

12.40. Показать, что при $\lambda>1$ уравнение $ze^{\lambda-z}=1$ в круге $\{z: |z|\le 1\}$ имеет единственный корень, который является действительным числом.

12.41. Доказать, что при $a>e$ уравнение $e^z=az^n$ имеет n корней внутри единичного круга.

12.42. Показать, что при $\lambda>1$ уравнение $z=\lambda-e^{-z}$ имеет при $\operatorname{Re} z\ge 0$ только один корень, являющийся действительным числом.

12.43. Доказать, что уравнения $z\sin z=1$ и $z=\operatorname{tg} z$ имеют только действительные корни.

12.44. Определить, сколько нулей имеет уравнение $\sin z=z$.

12.45. Показать, что при действительных значениях a и b уравнение $z^{2n}+a^2z^{2n-1}+b^2=0$ имеет $n-1$ корней с $\operatorname{Re} z>0$, если n нечетно, и n корней с $\operatorname{Re} z>0$, если n – четно.

12.46. Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри замкнутого кусочно-гладкого контура Жордана γ. Доказать, что если $f(z)$ внутри γ имеет n нулей, то $f'(z)$ внутри γ имеет $n-1$ нулей.

12.47. Сколько корней имеет в круге $\{z: |z| < 1\}$ уравнение $z = \varphi(z)$, если функция $\varphi(z)$ аналитична в замкнутом круге $\{z: |z| \le 1\}$ и $|\varphi(z)| < 1$?

12.48. Показать, что для любого $\rho > 0$ при достаточно большом n все нули функции

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

лежат в круге $\{z: |z| < \rho\}$.

12.49. Доказать, что многочлен

$$P_n(z) = nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \ldots + 1$$

при достаточно большом n не имеет корней в круге $\{z: |z| < \rho\}$.

12.50. Пусть $0 \le a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Доказать, что функция

$$f(z) = a_0 + a_1 \cos z + \ldots + a_n \cos nz$$

имеет только действительные корни.

12.51. Пусть функция $\varphi(z)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[0, a]$. Доказать, что функция

$$F(z) = \int_0^a \varphi(t) \cos tz \, dt$$

имеет только действительные корни.

12.52. Функцию Бесселя порядка n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, можно определить следующим равенством:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=1} e^{\frac{z}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\theta n - z\sin\theta)} d\theta.$$

Доказать, что $J_n(z)$ имеет только действительные нули.

Глава 13

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть функция $f(z)$ однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$, и пусть в каждой точке $z_0 \in D$ имеет место сохранение углов по величине и по направлению отсчета между любыми двумя гладкими кривыми Жордана, пересекающимися в точке z_0, и их образами при отображении f и имеет место постоянство растяжения по всем направлениям, выходящим из точки z_0. Тогда отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D.

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки z_0, в которой отображение $w = f(z)$ является конформным.

Аналогично можно определить понятие конформного отображения для областей из расширенной комплексной плоскости. Углом между кривыми, пересекающимися в точке $z = \infty$, назовем угол между образами этих кривых при отображении $\zeta = z^{-1}$ в точке $\zeta = 0$. Поскольку отображение $\zeta = z^{-1}$ является поворотом сферы Римана на 180° вокруг диаметра с концами в точках сферы с координатами (1/2, 0, 1/2) и (0, 1/2, 1/2), то это отображение сохраняет углы между кривыми в каждой точке сферы Римана и, кроме того, полюс $P(0, 0, 1)$ при этом переходит в точку (0, 0, 0). Таким образом, если функция $f(z)$ однолистна в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и в каждой точке $z_0 \in D$ имеет место консерватизм (сохранение) углов, а в каждой конечной точке из D – постоянство растяжения и точка $z = \infty$ является полюсом порядка не выше первого, то отображение f конформно.

Отображение, обратное к конформному, является конформным и суперпозиция конформных отображений также является конформным отображением

Если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ и не равна тождественно постоянной, то образ области D при отображении f

также является областью. Если еще предположить, что функция $f(z)$ однолистна в области D, то производная $f'(z) \neq 0$ всюду в D.

Основные принципы конформных отображений. Взаимная однозначность. Функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $D \subset \mathbf{C}$ на область $G \subset \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна и аналитична в области D. Если область D неограниченна, т. е. $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на область $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна в D и аналитична в D всюду, кроме, быть может, одной точки, в которой она имеет полюс первого порядка. Иными словами, однолистные аналитические функции и только они осуществляют конформное отображение областей на комплексной плоскости.

Принцип соответствия границ. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D и непрерывна вплоть до ее границы γ, являющейся кусочно-гладкой кривой Жордана. Если $f(z)$ отображает взаимно-однозначно кривую γ на кусочно-гладкую замкнутую кривую Γ с сохранением обхода, то функция $f(z)$ конформно отображает область D на int Γ. С другой стороны, если функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G, то функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание $\bar{D}$ области D так, что $f(z)$ будет отображать границу области D на границу области G взаимно однозначно и с сохранением обхода.

Принцип симметрии. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, граница которой содержит интервал γ действительной оси, а область D^* является симметричной к D относительно действительной оси, причем области D и D^* не имеют общих точек. Если функция $f(z)$ непрерывна вплоть до γ и принимает действительные значения на γ, то ее можно аналитически продолжить в область $D \cup \gamma \cup D^*$ следующим образом:

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D\cup\gamma, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z\in D^*. \end{cases}$$

Если при этом функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G и образом интервала является интервал Γ действительной оси, то функция $f(z)$ конформно отображает область

$D \cup \gamma \cup D^*$ на область $D \cup \Gamma \cup G^*$, где G^* – область, симметричная G относительно действительной оси.

Алогично этому утверждению справедливо утверждение, когда γ – дуга окружности, при этом симметрию относительно дуги окружности надо понимать как зеркальное отражение в данной окружности, осуществляемое инверсией.

Основным утверждением теории конформных отображений является

Теорема Римана. Пусть область D – односвязная в смысле расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует функция $w = f(z)$, которая конформно отображает область D на внутренность единичного круга $|w| < 1$. Условиями $f(z_0) = w_0$, $\arg f\notin (z) = \alpha$, где $z_0 \in D$, $|w_0| < 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, z_0, w_0, α – фиксированы, отображение f определяется однозначно.

По теореме Римана существует функция $w = f(z)$, которая конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на ограниченный многоугольник M, лежащий в w-плоскости $\mathbf{C}$. Пусть A_k, $k = 1, \ldots, n$, – последовательные вершины многоугольника M, занумерованные против часовой стрелки, $\pi\alpha_k$, $k=1, \ldots, n$, – величины углов M в вершинах соответственно A_k, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2$, $0 < \alpha_k \le 2$, и пусть a_k – прообраз вершины A_k, $k = 1, \ldots, n$, при отображении $w = f(z)$, т. е. $f(a_k) = A_k$, a_k – точка действительной прямой. Тогда имеет место *формула Кристоффеля–Шварца*

$$w = f(z) = c\int_{z_0}^{z} h(\varsigma)\,d\varsigma + c_1,$$

где c, c_1 – постоянные, а интеграл берется по кривой, лежащей в верхней полуплоскости, функция $h(\varsigma)$ – регулярная ветвь функции $(z-a_1)^{a_1-1}\ldots(z-a_n)^{a_n-1}$, однолистная в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Так как различные ветви этой функции отличаются друг от друга множителями, то в формуле Кристоффеля–Шварца в зависимости от выбора ветви $h(\varsigma)$ будет изменяться только константа c, точнее – $\arg c$.

Пусть для определенности заданы точки a_1, a_2, a_3, $a_1 < a_2$ и $z_0 = a_1$; полагая в приведенной выше формуле $z = a_1$, получим $c_1 = f(a_1) = A_1$. При $a_1 < x < a_2$, $\arg h(x) = \mathrm{const}$, значит,

$$A_2 - A_1 = f(a_2) - f(a_1) = ce^{i\theta}\int_{a_1}^{a_2} |h(t)|\, dt\,,$$

поэтому $\arg c = \arg(A_2 - A_1) - \theta$. Значит, формулу Кристоффеля–Шварца можно записать в виде

$$f(z) = Ae^{i\alpha}\int_{a_1}^{z} h(\varsigma)\, d\varsigma + A_1,$$

где $A > 0$, $\alpha = \arg(A_2 - A_1) - \theta$.

В этой формуле осталось $n - 2$ неизвестных параметров: $A > 0$ и $a_4, a_5, \dots, a_n$, так как

$$A_{k+1} - A_k = Ae^{i\alpha}\int_{a_k}^{a_{k+1}} h(t)\, dt$$

И так как $\arg h(x) = \mathrm{const}$ для $x \in (a_k, a_{k+1})$, то

$$|A_{k+1} - A_{k+2}| = A\int_{a_k}^{a_{k+1}} |h(t)|\, dt,\ k = 1, 2, \dots, n;$$

здесь считаем, что $a_{n+1} = a_1$, $A_{n+1} = A_1$ и что один из интервалов (a_k, a_{k+1}), $k = 1, 2, \dots$, содержит внутри себя точку $z = \infty$.

Эти соотношения позволяют определить все параметры.

13.1. Доказать, что суперпозиция однолистных функций является однолистной функцией.

13.2. Доказать, что если аналитическая функция $f(z)$ однолистна в окрестности точки z_0, то $f'(z) \neq 0$ в этой окрестности.

13.3. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $|z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$, $a_1 = f'(z_0) \neq 0$.

Доказать, что существует $\rho_1 > 0$, $\rho_1 < \rho$ такое, что для всех $z \in$ **C**: $|z - z_0| \leq \rho_1$ функция $f(z)$ однолистна. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

13.4. Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана. Пусть функция $f(z)$ аналитична на $\overline{\operatorname{int}\gamma}$ и принимает на γ каждое свое значение только один раз. Доказать, что $f(z)$ однолистна в $\operatorname{int}\gamma$.

13.5. Доказать, что предел равномерно сходящейся последовательности аналитичных однолистных функций является либо функцией однолистной, либо постоянной. Привести пример последовательности однолистных функций, равномерно сходящейся к функции, тождественно равной нулю.

13.5.1. Верно ли утверждение предыдущей задачи, если убрать условие аналитичности последовательности функций?

13.6. Определить области однолистности функций:

1) z^n, $n \in \mathbf{N}$; 2) $z + z^{-1}$; 3) e^z;

4) $\sin z$; 5) $\cos z$; 6) $\operatorname{tg} z$; 7) $\operatorname{th} z$.

13.7. Доказать, что регулярные ветви функций однолисты:

1) $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbf{N}$; 2) $\ln z$.

13.8. Пусть функция

$$w = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

аналитична на внутренности единичного круга $\{z\colon |z| < 1\}$, D – конформный образ внутренности единичного круга при отображении $w = w(z)$. Доказать, что площадь D равна

$$\pi + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2.$$

Это утверждение называется *внутренней теоремой площадей.*

13.9. Доказать, что в предположениях задачи 13.8, если

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,|\,a_n\,| \le 1,$$

то функция $f(z)$ однолистна во внутренности единичного круга.

13.10. Доказать, что для всех функций $w = w(z)$, удовлетворяющих предположениям задачи 13.8, минимум площади D достигается тогда, когда D совпадает с внутренностью единичного круга, т. е. $w(z) = z$.

13.11. Пусть функция

$$w = w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

однолистна во внешности единичного круга $\{z\colon |z| > 1\}$ и аналитична всюду, кроме бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2 \le 1$. Это утверждение называется *внешней теоремой площадей.*

13.12. Доказать, что если функция $f(z)$ однолистна в окрестности точки z_0, которая является полюсом, то этот полюс имеет первый порядок.

13.13. Пусть функция

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

однолистна во внутренности единичного круга $\{z: |z| < 1\}$. Доказать, что функция

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots$$

также однолистна во внутренности единичного круга.

13.14. Пусть функция

$$w = z + a_2 z^2 + \dots$$

аналитична и однолистна во внутренности единичного круга $\{z: |z| < 1\}$. Доказать, что $|a_2| \le 2$. Доказать, что это неравенство неулучшаемо.

13.15. Пусть функция

$$w = w(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

аналитична и однолистна во внутренности единичного круга $\{z: |z| < 1\}$, D – образ внутренности единичного круга при отображении $w = w(z)$ с границей ∂D. Доказать, что любая точка границы ∂D удалена от начала координат на расстояние не меньше, чем на 1/4. Эту постоянную называют *константой Кёбе*.

13.16. Пусть функция

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

аналитична и однолистна во внутренности единичного круга $\{z: |z| < 1\}$. Доказать, что:

1) Для любого $z \in \mathbf{C}$: $|z| < 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Эти неравенства называют *теоремой искажения*.

2) Для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}: |z_1| \le r, |z_2| \le r, 0 < r < 1$, справедливы неравенства

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \le \frac{|f'(z_1)|}{|f'(z_2)|} \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4.$$

3) Для любого z: $|z| < 1$ справедливо неравенство

$$|\arg f'(z)| \le 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Это неравенство называют *теоремой вращения.*

13.17. Пусть функция

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

аналитична и однолистна во внутренности единичного круга.

1) Доказать, что $|a_n| < en$ для любого $n \geq 2$.

2) Доказать, что если все коэффициенты a_n – действительные числа, то для любого $n \geq 2$ справедливо неравенство $|a_n| \leq n$.

Проверить, что функция $z / (1 - z)^2$, $|z| < 1$, удовлетворяет всем условиям задачи и для ее коэффициентов имеют место равенства $a_n = n$.

13.18. Целым линейным преобразованием называют преобразование $w = w(z) = az + b$, $a \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbf{C}$. Найти общий вид целого линейного преобразования, переводящего:

1) верхнюю полуплоскость $\{z \in C\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w \in C\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) верхнюю полуплоскость $\{z \in C\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\{w \in C\colon \operatorname{Im} w < 0\}$;

3) верхнюю полуплоскость $\{z \in C\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на правую полуплоскость $\{w \in C\colon \operatorname{Re} w > 0\}$;

4) правую полуплоскость $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ на правую полуплоскость $\{w \in C\colon \operatorname{Re} w > 0\}$.

Доказать, что во всех случаях преобразование однозначно определяется заданием одной пары соответственных внутренних точек $(z_0,\ w_0 = w(z_0))$ или двух пар $(z_k,\ w_k = w(z_k))$, $k = 1, 2$, граничных точек.

13.19. Найти целое линейное преобразование $w = w(z)$, отображающее полосу, заключенную между прямыми

$$y = kx + b_1,\ y = kx + b_2,\ z = x + iy,$$

на полосу $\{w \in \mathbf{C}\colon 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$, и удовлетворяющее условию $w(b_1) = 0$.

13.20. Найти целое линейное преобразование $w = w(z)$, отображающее внутренность единичного круга $\{z\colon |z| < 1\}$ на внутренность круга $\{w \in \mathbf{C}: |w - w_0| < R\}$ так, чтобы $w(0) = w_0$ и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с положительным направлением действительной оси угол α: $0 \leq \alpha \leq \pi$.

13.21. Для функции $w = z^{-1}$, $z = x + iy$, найти образы следующих линий:

1) окружностей $x^2 + y^2 = ax$, $a \in \mathbf{R}$;

2) окружностей $x^2 + y^2 = by$, $b \in \mathbf{R}$;

3) прямых $y = x + b$, $b \in \mathbf{R}$;

4) прямых $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$;

5) прямых $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k \in \mathbf{R}$;

6) парабол $y = ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

13.22. Установить образы при отображении

$$w = (z - z_0)^{-1} + h,\ h \in \mathbf{C},\ z = x + y:$$

1) прямоугольной сетки $x = c$, $y = c$, $c \in \mathbf{R}$;

2) полярной сетки $|z - z_0| = R$, $\arg(z - z_0) = \alpha$, $R > 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

13.23. Доказать, что дробно-линейная функция

$w = (az + b)/(cz + d)$, $ad \neq bc$, $w(-d/c) = \infty$, $w(\infty) = a/c$, $a, b, c, d \in \overline{\mathbf{C}}$

конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$.

13.24. Доказать, что суперпозиция дробно-линейных отображений есть дробно-линейное отображение.

13.25. Доказать, что обратное к дробно-линейному отображению является дробно-линейным отображением.

13.26. Доказать, что при дробно-линейном отображении образом окружности или прямой также является окружность или прямая.

13.26.1. Доказать, что уравнение вида $Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$ в $\mathbf{C}$ определяет прямую, если $A = 0$, $B \neq 0$, $C \in \mathbf{R}$. Если же $A \neq 0$,

$A \in \mathbf{R}$, $C \in \mathbf{R}$ и $|B|^2 - AC > 0$, то уравнение определяет окружность.

13.27. Точки M и M^* называют симметричными относительно окружности радиуса R с центром в точке O, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O и $|OM|\,|OM^*| = R^2$. Доказать, что при дробно-линейном отображении точки, симметричные относительно окружности или прямой, переходят в точки, симметричные относительно образа этой прямой или соответственно окружности.

13.28. Доказать, что существует и единственно дробно-линейное отображение, которое три различные точки z_1, z_2, z_3 переводит в три различные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение определяется формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

13.29. Доказать, что функция $w = f(z)$, определенная формулой в задаче 13.28, где z_1, z_2, z_3 – различные точки, и w_1, w_2, w_3 – также различные точки, конформно отображает круг, граница которого проходит через z_1, z_2, z_3, на круг, граница которого проходит через точки w_1, w_2, w_3. Под кругом понимаем внутренность или внешность окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Если же три точки лежат на одной прямой L, то круг – это полуплоскость с границей L.

13.30. Доказать, что дробно-линейное отображение $w(z) \not\equiv z$ может иметь не более двух неподвижных точек.

13.31. 1) Доказать, что дробно-линейное отображение

$$w(z) = (az + b)/(cz + d),\ ad \neq bc,\ w(z) \not\equiv z,$$

имеет две неподвижные точки z_1 и z_2.

2) Доказать, что эти точки совпадают, $z_1 = z_2$, тогда и только тогда, когда $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

3) Доказать, что если неподвижные точки z_1 и z_2 дробно-линейного отображения различны, $z_1 \neq z_2$, то

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = k\,\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

4) Доказать, что если неподвижные точки дробно-линейного отображения совпадают, т. е. $z_1 = z_2$, то

$$\frac{1}{w-z_1}=\frac{1}{z-z_1}+k,\ k=c,\ z_1=\frac{a-d}{2c}.$$

13.32. 1) Описать все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на внутренность единичного круга.

2) Описать все дробно-линейные отображения единичного круга на себя.

13.33. Доказать, что дробно-линейное отображение $w = w(z)$ единичного круга на себя, удовлетворяющее условиям

$$w(z_0)=w_0,\ \arg w'(z_0)=\alpha,\ |z_0|<1,\ |w_0|<1,\ \alpha\in\mathbf{R},$$

определяется формулой

$$\frac{w-w_0}{1-w\overline{w}_0}=\frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}e^{i\alpha}.$$

13.34. Пусть функция $w = f(z)$ однолистна, аналитична и отображает единичный круг $\{z\colon |z|\le 1\}$ на единичный круг $\{w\colon |w|\le 1\}$, причем $f(0) = 0$. Используя лемму Шварца, доказать, что $f(z) = az$, где $|a| = 1$.

13.35. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что однолистная аналитическая функция, отображающая единичный круг на единичный круг, является невырожденной дробно-линейной функцией.

13.36. Доказать, что дробно-линейное отображение $w = w(z)$ верхней полуплоскости на себя, удовлетворяющее условиям

$$w(z_0)=w_0,\ \arg w'(z_0)=\alpha,\ \operatorname{Im} z_0>0,\ \operatorname{Im} w_0>0,\ \alpha\in\mathbf{R},$$

определяется формулой $\dfrac{w-w_0}{w-\overline{w}_0}=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}e^{i\alpha}.$

13.37. Доказать, что любое конформное отображение всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ является дробно-линейным.

13.38. Доказать, что любое конформное отображение всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ на всю расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ является дробно-линейным.

13.39. Установить общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$:

1) на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) на правую полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Re} w > 0\}$;

3) на нижнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w < 0\}$;

4) на левую полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Re} w < 0\}$.

13.39.1. Найти общий вид дробно-линейного отображения, переводящего верхнюю полуплоскость на внутренность круга $|w| < R$.

13.39.2. Найти общий вид дробно-линейного отображения, переводящего круг $|z| < R$ на круг $|w| < R$.

13.40. Найти преобразование $w = w(z)$, отображающее открытый круг $\{z\colon |z| < R\}$ на правую полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Re} w > 0\}$, такое, что $w(R) = 0$, $w(-R) = \infty$, $w(0) = 1$. Установить образы полуокружностей $\{z\colon\ |z| = r,\ 0 < r < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

13.41. Найти дробно-линейное отображение, переводящее:

1) точки $z = -1,\ i,\ 1+i$ соответственно в точки $w = 0,\ 2i,\ 1-i$;

2) точки $z = -1,\ i,\ 1+i$ соответственно в точки $w = i,\ \infty,\ 1$;

3) точки $z = -1,\ \infty,\ i$ соответственно в точки $w = i,\ 1,\ 1+i$;

4) точки $z = -1,\ \infty,\ i$ соответственно в точки $w = \infty,\ i,\ 1$;

5) точки $z = -1,\ \infty,\ i$ соответственно в точки $w = 0,\ \infty,\ 1$.

13.42. Найти дробно-линейное отображение, такое, что

1) точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в точку -1;

2) точки $\dfrac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а точка $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ переходит в ∞.

13.43. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$, такое, что точка i является двойной неподвижной точкой, а точка $z = 1$ переходит в ∞.

13.44. Найти точки, симметричные точке $2 + i$ относительно окружности:

1) $\{z\colon\ |z| = 1\}$; 2) $\{z\colon\ |z| = 3\}$; 3) $\{z\colon\ |z - i| = 3\}$.

13.45. Найти симметричный образ относительно единичной окружности следующих линий:

1) $\{z\colon |z| = 2^{-1}\}$; 2) $z\colon |z - 1| = 1\}$; 3) $\{z\colon \operatorname{Im} z = 2\}$;

4) $\{z\colon |z - z_0| = |z_0|\}$; 5) $\{z\colon |z - z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}, |z_0| > 1$;

6) $\{z\colon |\operatorname{Re} z|^2 - |\operatorname{Im} z|^2 = 1\}$;

7) граница треугольника с вершинами в точках

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, z_k \neq z_l, k, l = 1, 2, 3, k \neq l.$

13.46. Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z$: $\operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{w\colon |w| \leq 1\}$ так, чтобы:

1) $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$;

2) $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$;

3) $w(a + bi) = 0$, $\arg w'(a + bi) = 0$, $b > 0$.

13.47. Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z$: $\operatorname{Im} z > 0\}$ на открытый круг $\{w\colon |w - w_0| < R\}$ так, чтобы точка i перешла в центр круга, а производная в этой точке была положительной.

13.48. Отобразить конформно открытый круг $\{z\colon |z| < 2\}$ на правую полуплоскость $\{w \in \mathbf{C}\colon \operatorname{Re} w > 0\}$ так, чтобы $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

13.49. Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z$: $\operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость так, чтобы

$$w(z_0) = \overline{z}_0, \arg w'(z_0) = -\pi/2, \operatorname{Im} z_0 > 0.$$

13.50. Отобразить конформно внутренность единичного круга $\{z\colon |z| < 1\}$ на внутренность единичного круга $\{w\colon |w| < 1\}$ так, чтобы

1) $w(2^{-1}) = 0$, $\arg w'(2^{-1}) = 0$;

2) $w(2^{-1}i) = 0$, $\arg w'(2^{-1}i) = \pi/2$;

3) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\pi/2$;

4) $w(z_0) = z_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

13.51. Отобразить конформно открытый круг $\{z\colon |z| < r\}$ на открытый круг $\{w\colon |w| < R\}$ так, чтобы

$$w(z_0) = w_0, \arg w'(z_0) = \alpha, |z_0| < r, |w_0| < R.$$

13.52. Отобразить конформно открытый круг $\{z\colon |z - 2| < 1\}$ на открытый круг $\{w\colon |w - 2i| < 2\}$ так, чтобы $w(2) = i$, $\arg w'(2) = 0$.

13.53. Отобразить конформно внутренность единичного круга $\{z\colon |z| < 1\}$ на внутренность единичного круга $\{w\colon |w| < 1\}$

так, чтобы точки z_1 и z_2, $|z_1|, |z_2| < 1$, перешли в точки $\pm a$, $0 < a < 1$. Определить a.

13.54. Найти общий вид дробно-линейного преобразования $w = w(z)$, отображающего открытый круг $\{z\colon\ |z| < R\}$ на открытый круг $\{w\colon\ |w| < R\}$ так, чтобы

1) $w(a) = 0, |a| < R$; 2) $w(a) = b, |a| < R, |b| < R$; 3) $w(\pm R) = \pm R$.

13.55. Построить отображение внутренности единичного круга $\{z\colon |z| < 1\}$ на внутренность единичного круга $\{w\colon |w| < 1\}$, при котором прообраз центра находится на действительной оси, а дуга $0 \le \varphi \le \pi/2$ единичной окружности отображается в дугу

1) $0 \le \theta \le \pi/2$; 2) $0 \le \theta \le \pi/3$; 3) $\pi/2 \le \theta \le 7\pi/6$.

13.56. Доказать, что невырожденное дробно-линейное преобразование $w = (az + b) / (cz + d)$ можно привести к виду $w = (\alpha z + \beta) / (\gamma z + \delta)$, где $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$. Если $(\alpha + \delta) \in \mathbf{R}$, то преобразование $w = w(z)$ называют *эллиптическим* при $|\alpha + \delta| < 2$, *гиперболическим* – при $|\alpha + \delta| > 2$ и *параболическим* – при $|\alpha + \delta| = 2$. Если же $\operatorname{Im}(\alpha + \delta) \ne 0$, то преобразование $w = w(z)$ называют *локсодромическим*.

13.57. Найти общий вид параболического преобразования открытого круга $\{z\colon\ |z| < R\}$ на открытый круг $\{w\colon\ |w| < R\}$, при котором точка R остается неподвижной.

13.58. Доказать, что при гиперболическом преобразовании:

1) любая окружность, проходящая через две неподвижные точки, переходит сама в себя, и направление обхода сохраняется;

2) любая окружность, ортогональная к окружностям, проходящим через неподвижные точки, переходит в окружность, обладающую тем же свойством.

13.59. Доказать, что при эллиптическом преобразовании:

1) любая окружность, ортогональная к окружностям, проходящим через неподвижные точки, переходит сама в себя с сохранением направления обхода;

2) дуга окружности, соединяющая неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющую неподвижные точки и образующую угол α с первой дугой, $\alpha = \arg k$ (см. 13.30).

13.60. Доказать, что при локсодромическом преобразовании:

1) выполняются свойства 13.58 2) и 13.59 2);

2) не существует неподвижных окружностей, если только $\arg k \neq \pi$ (см. 13.30); если же $\arg k = \pi$, то окружности, проходящие через неподвижные точки, переходят сами в себя с изменением направления обхода.

$$w = e^{i\lambda} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \; a = |a| e^{i\alpha}, \; |a| < 1,$$

может быть только либо эллиптическим, либо параболическим, либо гиперболическим. Выяснить, при каких значениях a и λ имеет место каждый из указанных случаев.

13.62. Доказать, что конформное отображение концентрического кольца $\{z\colon r_1 < |z| < r_2\}$ на концентрическое кольцо $\{w\colon R_1 < |w| < R_2\}$ существует тогда и только тогда, когда $r_1/r_2 = R_1/R_2$. При выполнении этого условия всякое конформное отображение является отображением вида $w = az$ или $w = az^{-1}$ и однозначно определяется заданием одной пары соответствующих друг другу граничных точек.

13.63. Отобразить конформно:

1) кольцо $\{z\colon 2 < |z| < 5\}$ на кольцо $\{w\colon 4 < |w| < 10\}$ так, чтобы $w(5) = -4$;

2) кольцо $\{z\colon 1 < |z - 2i| < 2\}$ на кольцо $\{w\colon 2 < |w - 3 + 2i| < 4\}$ так, чтобы $w(0) = -1 - 2i$.

13.64. Отобразить конформно:

1) область $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z\colon |z - h| < R\}$, $h > R$, на кольцо $\{w\colon \rho < |w| < 1\}$ так, чтобы мнимая ось перешла в единичную окружность $\{w\colon |w| = 1\}$; определить ρ;

2) область $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z\colon |z - h| < 1\}$, $h > 1$, на кольцо $\{w\colon 1 < |w| < r\}$; определить h.

13.65. Отобразить конформно:

1) эксцентрическое кольцо $\{z\colon |z| < r, |z - ½| < 1\}$ на концентрическое кольцо $\{w\colon 1 < |w| < \rho\}$, определить ρ.

2) эксцентрическое кольцо $\{z\colon |z - 3| < 9, |z - 8| < 16\}$ на концентрическое кольцо $\{w\colon 1 < |w| < \rho\}$, определить ρ;

13.66. Найти группы линейных преобразований, соответствующих при стереографической проекции вращению сферы Римана:

1) вокруг вертикального диаметра;

2) вокруг диаметра, параллельного действительной оси;

3) вокруг диаметра, параллельного мнимой оси;

4) вокруг диаметра, стереографическая проекция одного из концов которого есть точка a.

13.67. Доказать, что группа линейных преобразований, соответствующих вращению сферы Римана и переводящих точки со стереографическими проекциями a и b друг в друга, определяется соотношением

$$\frac{w-b}{1+\bar{b}w} = e^{i\alpha}\frac{|z-a|}{1+\bar{a}z}.$$

13.68. Доказать, что функция $w = z^2$ конформно отображает верхнюю (нижнюю) полуплоскость на плоскость **C** с разрезом по неотрицательной части действительной оси. Найти образы при этом отображении:

1) лучей $\arg z = \alpha$; 2) окружностей $|z| = r$;

3) прямых $\operatorname{Re} z = c$; 4) прямых $\operatorname{Im} z = c$.

13.69. Доказать, что регулярные ветви функции $w=\sqrt{z}$ конформно отображают плоскость **C** с разрезом по неотрицательной части действительной оси соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскости.

13.70. Найти конформный образ плоскости **C** с разрезом по неположительной части действительной оси, определяемый регулярными ветвями функции $w=\sqrt{z}$.

13.71. Отобразить конформно внутренность какой-либо ветви равносторонней гиперболы на верхнюю полуплоскость.

13.72. Отобразить конформно внешность параболы на верхнюю полуплоскости.

13.73. Доказать, что функция $w=z^{\pi/\beta}$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \beta < 2\pi$ на верхнюю полуплоскость.

13.74. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ следующие круговые "луночки":

1) $\{z: |z| < 1, |z-i| < 1\}$; 2) $\{z: |z| < 1, |z-i| > 1\}$;

3) $\{z: |z| > 1, |z-i| < 1\}$; 4) $\{z: |z| > 1, |z-i| > 1\}$;

5) $\{z: |z| > 2, |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$.

13.75. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ следующие области:

1) $\mathbf{C}\setminus[-1, 1]$; 2) $\mathbf{C}\setminus[z_1, z_2]$; 3) $\mathbf{C}\setminus\{(-\infty, -R]\cup[R, +\infty)\}$;

4) плоскость с разрезом по дуге окружности, соединяющей точки -1, 1 и проходящей через точку ih, $0 < h < 1$;

5) область $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}\setminus[0, ih]$, $h > 0$.

13.76. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость следующие области:

1) внутренность единичного круга с центром в начале координат, лежащую в верхней полуплоскости;

2) внешность отрезка [0, 1];

3) внешность объединения лучей $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$;

4) внешность части единичной окружности, которая не лежит в нижней полуплоскости;

5) часть плоскости $\mathbf{C}$, лежащей над объединением следующих кривых: полупрямых $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ и части единичной окружности с центром в начале координат, лежащей в нижней полуплоскости;

6) внутренность области, ограниченной отрезком [0, 1] и частью окружности, пересекающей действительную ось в точках 0 и 1; окружность лежит в верхней полуплоскости и в точке 1 составляет угол $3\pi/4$ с действительной осью.

13.77. Для всякого натурального $n\in\mathbf{N}$ найти прообраз верхней полуплоскости при отображении $w = (1 + z/n)^n$. Найти предельный прообраз верхней полуплоскости при $n\to+\infty$.

13.78. Доказать, что функция $w = e^z$ конформно отображает:

1) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхнюю полуплоскость;

2) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ на область, лежащую выше кривой, которая есть объединение $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; и части окружности $|w| = 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$;

3) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z < 0$ на внутренность единичного полукруга с центром в начале координат, лежащего в верхней полуплоскости;

4) $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ на комплексную плоскость с разрезом по неотрицательной части вещественной оси.

13.79. Найти образы при отображении $w = e^z$, $z = x + iy$:

1) прямоугольной сетки $x = c$, $y = c$, $c\in\mathbf{R}$;

2) прямых $y = kx + b, \quad k, b \in \mathbf{R}$;

3) полосы $\alpha < y < \beta, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$;

4) полосы между прямыми $y = x$, $y = x + 2\pi$;

5) полуполосы $x < 0, 0 < y < \alpha \le 2\pi$;

6) полуполосы $x > 0, 0 < y < \alpha \le 2\pi$;

7) прямоугольника $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta, \delta - \gamma \le 2\pi, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$.

13.80. Найти образы при отображении $w = \ln z$:

1) полярной сетки $|z| = R$, $\arg z = \theta$;

2) логарифмической спирали $r = Ae^{k\varphi}$, $A > 0$;

3) угла $0 < \arg z < \alpha \le 2\pi$;

4) сектора $|z| < 1, 0 < \arg z < \alpha \le 2\pi$;

5) кольца $\{z: r_1 < |z| < r_2\}$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$.

13.81. Доказать, что в комплексной плоскости **C** с разрезом по неотрицательной части действительной оси функция Ln z распадается на счетное число регулярных ветвей

$w_k = (\operatorname{Ln} z)_k = \ln |z| + i \arg z + 2\pi ki, k \in \mathbf{Z}, 0 < \arg z < 2\pi$,

которые конформно отображают эту область на полосу $2\pi k < \operatorname{Im} z <(2k + 1)\pi$.

13.82. Доказать, что функция Жуковского $w = 2^{-1}(z + z^{-1})$ конформно отображает:

1) внутренность (внешность) единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$;

2) верхнюю (нижнюю) полуплоскость на плоскость с разрезом по полупрямым $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$;

3) область $\{\operatorname{Im} z < 0, |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость;

4) область $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость;

5) полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ на нижнюю полуплоскость;

6) область $|z| > \rho > 1$ на внешность эллипса

$$\left(\frac{\operatorname{Re} w}{2^{-1}(\rho+\rho^{-1})}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} w}{2^{-1}(\rho+\rho^{-1})}\right)^2 = 1;$$

7) круг $|z| < \rho < 1$ на внешность эллипса, заданного в п. 6);

8) сектор $\alpha < \arg z < \pi - \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$ на внешность гиперболы $(\operatorname{Re} w / \cos \alpha)^2 - (\operatorname{Im} w / \sin \alpha)^2 = 1$;

9) сектор $0 < \arg z < \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, на внутренность правой ветви гиперболы $(\mathrm{Re}\, w / \cos\alpha)^2 - (\mathrm{Im}\, w / \sin\alpha)^2 = 1$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$;

10) сектор $0 < \arg z < \alpha$, $|z| > 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, на область $(\mathrm{Re}\, w / \cos\alpha)^2 - (\mathrm{Im}\, w / \sin\alpha)^2 = 1$, $\mathrm{Re}\, w > 0$, $\mathrm{Im}\, w > 0$.

13.83. Доказать, что регулярные ветви функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратной к функции Жуковского, конформно отображают:

1) плоскость **C** с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ соответственно на внутренность и внешность единичного круга с центром в начале координат;

2) плоскость **C** с разрезами по $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскость;

3) верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость без единичного круга с центром в начале координат;

4) верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга, лежащую в нижней полуплоскости.

13.84. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \mathrm{Im}\, w > 0\}$ следующие области:

1) $\{z\colon |z| < 1\} \setminus [1/2, 1]$;

2) $\{z\colon |z| < 1\} \setminus \{[-1, 0] \cup [a, 1]\}$, $0 < a < 1$;

3) $\{z\colon |z| > 1\} \setminus \{[-a, -1] \cup [1, +\infty)\}$, $a > 1$;

4) $\{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0, |z| < 1\} \setminus [0, ai]$, $0 < a < 1$;

5) $\{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0, |z| < 1\} \setminus [ai, i]$, $0 < a < 1$.

13.85. Отобразить конформно внутренность единичного круга

$$\{z\colon |z| < 1\} \setminus [(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}],\ 0 < h < 1,\ 0 \le \alpha < 2\pi,$$

на внутренность единичного круга $\{w\colon |w| < 1\}$.

13.86. Найти образ при отображении, осуществляемом функцией Жуковского:

1) окружности, проходящей через точки $+1$ и -1 под углом α, $-\pi < \alpha < \pi$, к действительной оси в точке 1; куда отображается внешность такой окружности?

2) окружности, проходящей через точку $z = 1$ под углом α к действительной оси, $-\pi < \alpha < \pi$, и содержащей внутри точку -1; куда отображается внешность такой окружности?

13.87. Доказать, что следующие функции осуществляют конформное отображение указанных областей:

1) $w = \operatorname{ch} z$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$, на верхнюю полуплоскость;

2) $w = \cos z$, $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, на верхнюю полуплоскость;

3) $w = \sin z$, $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$, на верхнюю полуплоскость;

4) $w = \operatorname{tg} z$, $|\operatorname{Re} z| < \pi/4$, на внутренность единичного круга.

13.88. Найти образы при отображении $w = \cos z$, $z = x + iy$:

1) прямоугольной сетки $x = c$, $y = c$, $c \in \mathbf{R}$;

2) полуполосы $0 < x < \pi$, $y < 0$;

3) полуполосы $0 < x < \pi/2$, $y > 0$;

4) полуполосы $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$;

5) полосы $0 < x < \pi$;

6) прямоугольника $0 < x < \pi$, $-h < y < h$, $h > 0$.

13.89. Найти образы при отображении $w = \operatorname{tg} z$, $z = x + iy$:

1) прямоугольной сетки $x = c$, $y = c$, $c \in \mathbf{R}$;

2) полуполосы $0 < x < \pi$, $y > 0$;

3) полосы $0 < x < \pi$;

4) полосы $0 < x < \pi/4$;

5) полосы $-\pi/4 < x < \pi/4$.

13.90. Найти образы при отображении $w = \operatorname{ch} z$, $z = x + iy$:

1) прямоугольной сетки $x = c$, $y = c$, $c \in \mathbf{R}$;

2) полосы $0 < y < \pi$;

3) полуполосы $x > 0$, $0 < y < \pi$.

13.91. Найти образы при отображении $w = \operatorname{cth} z$, $z = x + iy$:

1) полосы $0 < y < \pi$;

2) полуполосы $0 < y < \pi$, $x > 0$.

13.92. Найти образы при отображении $w = \arcsin z$, $z = x + iy$:

1) верхней полуплоскости;

2) $\mathbf{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$;

3) $x > 0$, $y > 0$;

4) $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\} \setminus (-\infty, -1]$.

13.93. Отобразить конформно следующие области на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$:

1) плоскость $\mathbf{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $-\infty < a < b < +\infty$;

2) полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \alpha$, $0 < \alpha < \pi$;

3) полосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ с разрезом по отрезку $[0, ia]$, $0 < \alpha < \pi$;

4) полосу $\{z: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ с разрезом по лучу $[a, +\infty)$, $a \in \mathbf{R}$;

5) полуполосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[i\,\pi/2, a + i\,\pi/2]$, $a > 0$;

6) внешность круга с центром в точке 1 и с радиусом, равным единице, лежащую в правой полуплоскости $\{z: |z-1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$, с разрезом по отрезку $[2, 3]$;

7) область $\{z: |z-1| > 1, |z-2| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$;

8) плоскость $\mathbf{C}$ с разрезом по отрезку $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$;

9) внутренность единичного круга $\{z: |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[-1, a]$, $-1 < a < 0$;

10) внешность единичного круга $\{z: |z| > 1\}$ с разрезами по отрезкам $[a, -1]$, $[1, b]$, $-\infty < a < -1$, $1 < b < \infty$;

11) внутренность единичного круга $\{z: |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$.

13.94. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ плоскость $\mathbf{C}$ с разрезом по лучу $[-4, +\infty)$ и отрезку $[-3i, 3i]$.

13.94.1. Отобразить конформно область, которую часто называют “внешность креста”: $\mathbf{C}\setminus\{y = 0, x \in [-1, 1]; y \in [-1, 1], x = 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

13.95. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ внутренность правой ветви гиперболы $\{z: z = x + iy, x > 0, (x^2\cos^2 a - y^2\sin^2 a) > 1\}$.

13.96. Отобразить конформно на внешность единичного круга $\{w: |w| > 1\}$ плоскость $\mathbf{C}$ с разрезами по отрезкам $[0, e^{2k\pi i}/n]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

13.97. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ следующие области:

1) внутренность эллипса;

2) внутренность параболы;

3) внутренность правой ветви равносторонней гиперболы $\{z: (\mathrm{Re}\, z)^2 - (\mathrm{Im}\, z)^2 = 1, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

13.98. Доказать, что $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{z_0\}$ нельзя конформно отобразить на внутренность единичного круга.

13.99. Пусть границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки. Доказать, что существует одна и только одна функция $w = f(z)$, которая конформно отображает D на G так, что $w_0 = f(z_0)$, $\arg f'(z_0) = a$, где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $a \in \mathbf{R}$ заданы.

13.100. Пусть границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки. Доказать, что существует одна и только одна функция $w = f(z)$, которая конформно отображает D на G так, что $f(z_0) = w_0$, $f(z_1) = w_1$, где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $z_1 \in \partial D$, $w_1 \in \partial G$.

13.101. Пусть границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки. Доказать, что существует одна и только одна функция $w = f(z)$, которая конформно отображает D на G так, что

$$f(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3,$$

где z_1, z_2, z_3 – различные точки границы ∂D, а w_1, w_2, w_3 – различные точки границы ∂G, занумерованные в порядке положительной ориентации границ ∂D и ∂G.

13.102. Доказать формулу Кристоффеля–Шварца (см. введение к главе).

13.103. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z: \mathrm{Im}\, z > 0\}$ на ограниченный многоугольник M, лежащий в w-плоскости $\mathbf{C}$ так, что $a_k \neq \infty$, $k = 1, \ldots, n - 1$, $a_n = \infty$. Доказать, что

$$f(z) = c\int_{z_0}^{z} (\xi - a_1)^{a_1 - 1} \ldots (\xi - a_{k-1})^{a_{k-1} - 1}\, d\xi + c_1$$

(см. введение к главе).

13.104. Доказать, что функция

$$w(z)=\frac{1}{B(a_1,a_2)}\int_0^z \xi^{a_1-1}(1-\xi)^{a_2-1}\,d\xi,$$

где $B(a_1, a_2)$ – бета-функция, конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$ на внутренность треугольника в w–плоскости $\mathbf{C}$ с вершинами $A_1=0$, $A_2=1$, $\operatorname{Im} A_3>0$ и углами $\pi a_1, \pi a_2, \pi a_3$, $a_1+a_2+a_3=1$.

13.105. Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$ на прямоугольник с вершинами $A_1=1$, $A_2=1+iH$, $A_3=-1+iH$, $A_4=-1$.

13.106. Отобразить конформно на внутренность единичного круга $\{w\colon |w|<1\}$:

1) внутренность многоугольника;

2) внешность многоугольника;

3) внутренность выпуклого правильного многоугольника;

4) звездообразный десятиугольник;

5) внешность квадрата;

6) внутренность параболы.

13.107. Найти конформный образ верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$, осуществляемый отображением

$$w=\int_0^z \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{2/3}}.$$

13.108. Найти конформный образ внутренности единичного круга $\{z\colon |z|<1\}$, осуществляемый отображением

$$w=\int_0^z \frac{d\xi}{(1-\xi^4)^{1/2}}.$$

Глава 14

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Действительная функция $u(x, y)$ двух действительных переменных x и y называется *гармонической* в области D, если $u(x, y)$ в этой области дважды дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Дважды дифференцируемая в области D действительная функция $v(x, y)$ называется *гармонически сопряженной* с гармонической функцией $u(x, y)$, если в этой области справедливы соотношения

$$u_x = v_y, \ u_y = -v_x.$$

Функция $v(x, y)$ также является гармонической в односвязной области D и может быть найдена по формуле

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy) + C,$$

где (x_0, y_0) – произвольная фиксированная точка области D, а интеграл не зависит от пути, соединяющего точки (x_0, y_0) и (x, y) и целиком лежащего в области D.

Если действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармонически сопряженными в области D, то функция $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, $z = x + iy$, аналитична в области D. С другой стороны, если функция $f(z) = u + iv$ является аналитической в области D, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармонически сопряженными в области D. Таким образом, любая аналитическая функция может быть восстановлена по ее действительной (или мнимой) части с точностью до чисто мнимой (или действительной) константы.

Для функции, гармонической в замкнутом круге радиуса R с центром в точке (x_0, y_0), справедлива формула среднего значения

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)\, d\varphi,$$

т. е. значение гармонической функции в точке определяется ее значениями на окружности с центром в этой точке.

Если отличная от постоянной функция $u(x, y)$ является гармонической в ограниченной области D и непрерывной в $\bar{D}$, то внутри области D функция $u(x, y)$не может достигать своего максимального и минимального значений (принцип максимума гармонической функции).

Гармоническая в области D функция бесконечно дифференцируема в D, причем любая производная гармонической функции также является гармонической функцией.

Гармоническая в области D функция $u(x, y)$ в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in D$ может быть разложена в степенной ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (x - x_0)^n (y - y_0)^m,$$

который равномерно и абсолютно сходится внутри круга сходимости. Равномерно сходящийся ряд из гармонических функций является гармонической функцией в области сходимости этого ряда.

Справедлива *теорема Лиувилля* для гармонических функций: если функция $u(x, y)$ является гармонической функцией на плоскости $\mathbf{R}^2$ и ограничена, то $u(x, y) \equiv \text{const}$.

Задача Дирихле. Пусть D – ограниченная область, граница которой γ является замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана. Задача Дирихле для оператора Лапласа в области D состоит в том, чтобы найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в D, непрерывную в $\bar{D}$ и принимающую на γ непрерывные значения $\varphi(x, y)$, т. е.

$$\Delta u = 0, \ (x, y) \in D,$$

$$u\big|_{(x, y) \in \gamma} = \varphi(x, y), \ (x, y) \in \gamma.$$

В случае неограниченной области D задача Дирихле состоит в том, чтобы найти функцию, гармоническую в D, ограниченную и принимающую заданные непрерывные значения на границе D.

Пусть D – ограниченная область, граница которой γ является замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана. *Задача Неймана* для оператора Лапласа в области D состоит в том, чтобы найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в D, непрерывно дифференцируемую в $\bar{D}$ и удовлетворяющую условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y)\in D} = \psi(x,y),\ (x,y)\in\gamma,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к γ.

Функция Грина задачи Дирихле. Пусть D – ограниченная область, граница которой является замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана. Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа называется функция

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta| + g(z,\zeta),\ z,\zeta\in D,$$

где функция $g(z,\zeta)$ удовлетворяет условиям:

1) при каждом фиксированном $\varsigma \in D$ функция $g(z, \varsigma)$ является гармонической в области D по переменной z, т. е.

$$\Delta_z\, g(z, \varsigma) = 0,\ z \in D;$$

2) при каждом фиксированном ς функция $g(z, \varsigma)$ непрерывна по z в $\overline{D}$ и

$$\left. g(z,\zeta)\right|_{z\in\gamma} = -\frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|\Big|_{\zeta\in\gamma}.$$

14.1. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична в области D. Доказать, что функции $u(z)$ и $v(z)$ являются гармоническими в D.

14.2. Доказать, что аналитическая в односвязной области D функция $f(z) = u + iv$ может быть восстановлена по ее действительной части с точностью до аддитивной чисто мнимой постоянной c по формуле

$$f(z) = u(z) + i\int_{z_0}^{z}(-u_y dx + u_x dy) + c,$$

где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ – произвольная фиксированная точка области D, а интеграл не зависит от пути, соединяющего точки z_0 и z и целиком лежащего в D.

14.3. Доказать, что аналитическая в односвязной области функция $f(z) = u + iv$ может быть восстановлена по ее мнимой части с точностью до аддитивной действительной постоянной. Найти формулу, восстанавливающую $f(z)$ по функции $v(z)$.

14.4. Доказать, что гармоническая в области D функция бесконечно дифференцируема в D.

14.5. Пусть действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области D и всюду в D удовлетворяют условиям: $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial v/\partial y = -\,\partial u/\partial y$. Доказать, что функции u и v являются гармоническими в D.

14.6. Доказать, что конечная линейная комбинация с постоянными коэффициентами гармонических функций является также функцией гармонической.

14.6.1. Показать, что произведение гармонических функций не обязано быть гармонической функцией.

14.7. Доказать, что если функция $u(x, y)$ является гармонической в области D, то функция $\dfrac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m}$, $m, n = 0, 1, \ldots$, также является гармонической в D.

14.8. Построить функцию, гармонически сопряженную с данной:

1) $u(x, y) = xy$; 2) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$; 3) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

4) $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$; 5) $u(r, \varphi) = r\,\varphi\cos\varphi + r\log r\,\sin\varphi$;

6) $u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; 7) $u(x, y) = y\cos y\,\mathrm{ch}\,x + x\sin y\,\mathrm{sh}\,x$;

8) $v(x, y) = \log(x^2 + y^2) - x^2 - y^2$;

9) $v(x, y) = x\cos x\,\mathrm{ch}\,y + y\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

14.9. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданному модулю и аргументу:

1) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$; 2) $\arg f(z) = xy$;

3) $|f(z)| = e^{r^2\cos 2\varphi}\ (z = re^{i\varphi})$; 4) $\arg f(z) = \varphi + r\sin\varphi\ (z = re^{i\varphi})$.

14.10. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряженные гармонические функции. Доказать, что функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ следующего вида являются также сопряженными гармоническими функциями:

1) $U = au + bv$, $V = bu + av$, a и b – константы;

2) $U = au_1 + bu_2$, $V = av_1 + bv_2$, a и b – константы, функции u_1 и v_1, u_2 и v_2 попарно являются сопряженными гармоническими функциями;

3) $U = e^u \cos v$, $V = e^u \sin v$; 4) $U = u_1u_2 - v_1v_2$, $V = u_1v_2 + u_2v_1$;

5) $U = u^2 - v^2$, $V = 2uv$; 6) $U = \dfrac{\partial^{n+m} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}, V = \dfrac{\partial^{n+m} v(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}$

(n, m – неотрицательные целые числа).

14.11. Найти гармонические функции следующего вида:

1) $u(x, y) = \varphi(x)$; 2) $u(x, y) = \varphi(y/x)$;
3) $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$; 4) $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$;

5) $u(x, y) = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$; 6) $u(x, y) = \varphi(xy)$.

14.12. Найти гармонические функции, сохраняющие постоянные значения на каждой кривой следующих семейств кривых:

1) $x = c$; 2) $y = cx$; 3) $x^2 + y^2 = cx$; 4) $x^2 + y^2 = cy$.

14.13. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и всюду в этой области $f(z) \neq 0$. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\log |f(z)|$?

14.14. Пусть $u(x, y)$ – гармоническая функция. Для каких действительных функций $f(t)$ одного переменного t функция $f(u(x, y))$ будет гармонической? Будет ли гармонической функция $u^2(x, y)$?

14.15. Доказать, что при невырожденном преобразовании переменных (x, y) гармоническая функция переходит в гармоническую.

14.16. Записать уравнение Лапласа $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ в полярной системе координат и найти его решение, зависящее только от r.

14.17. Доказать формулу среднего значения для гармонической функции.

14.18. Пусть функция $u(z)$ определена в области D. Доказать, что если для любой точки $z_0 \in D$ и любого круга $\{z: |z - z_0| < r\} \in D$ справедлива формула среднего значения для функции $u(z)$, то $u(z)$ является гармонической функцией в области D.

14.19. Доказать принцип максимума гармонической функции.

14.20. Доказать единственность решения задачи Дирихле.

14.20.1. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в области D и равна нулю на ее границе. Следует ли отсюда, что $u(x, y) \equiv 0$?

14.20.2. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в замкнутой области $\overline{D}$ и ограничена в $\overline{D}$, а на границе области D обращается в нуль. Следует ли отсюда, что $u(x, y) \equiv 0$?

14.20.3. Верно ли утверждение: если функция $u(x, y)$ гармонична и ограничена в замкнутой области $\overline{D}$, то $\inf\limits_{\overline{D}} u(x, y)$ достигается на границе области D?

14.20.4. Пусть $u(x, y)$ – гармоническая функция в области D и существует последовательность точек $\{x_n, y_n\} \in D$, $n \in \mathbf{N}$, которая сходится к точке $(x_0, y_0) \in D$ и для которой $u(x_0, y_0) = 0$. Следует ли отсюда, что $u(x, y) \equiv 0$ в области D?

14.21. Рассмотреть функцию $u(\mathrm{z}) = 1 - \operatorname{Re} \mathrm{z}^{-1}$, которая является гармонической в круге $\{x^2 + y^2 < x\}$, непрерывной всюду на границе этого круга $\{x^2 + y^2 = x\}$, кроме точки $(0, 0)$, и равной нулю всюду на окружности $\{x^2 + y^2 = x\}$, кроме точки $(0, 0)$. (Освобождение только одной точки границы от условий Дирихле может привести к неединственности задачи Дирихле.) Удовлетворяет ли данная функция условиям теоремы единственности задачи Дирихле?

14.22. Верно ли утверждение: пусть функция $u(\mathrm{z})$ является гармонической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \mathrm{z} > 0$ и равна нулю всюду на оси x, т. е. $u(x) \equiv 0$; тогда $u(\mathrm{z}) = a \operatorname{Im} \mathrm{z}$, где a – неотрицательная константа.

14.23. Пусть функция $u(\mathrm{z})$ является гармонической в области D, которая симметрична относительно оси Ox, и пусть $u(\mathrm{z}) = 0$ при $\mathrm{z} \in D \cap \{\operatorname{Im} \mathrm{z} = 0)$. Доказать, что $u(z) = -u(\overline{z})$ при $\mathrm{z} \in D$.

14.24. Пусть функции $f(\mathrm{z}) = u(\mathrm{z}) + iv(\mathrm{z})$ и $\mathrm{z} f(\mathrm{z})$ являются гармоническими, т. е.

$$\Delta u + i\,\Delta v = 0, \qquad \Delta(xu - yv) + i\,\Delta(yu + xv) = 0.$$

Доказать, что функция $f(\mathrm{z})$ является аналитической.

14.24.1. Показать, что в предыдущей задаче одного первого условия не достаточно, чтобы функция $f(z)$ была аналитической.

14.25. Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ является гармонической в области D. Доказать, что если $|f(z)| = 0$ в D, то $f(z) \equiv \text{const}$ в D.

14.26. Доказать, что функция

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\,h(z_0+Re^{i\varphi})}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\varphi,$$

где $z=z_0+re^{i\varphi},\ 0<r<R$, является гармонической в круге $\{|z-z_0|<R\}$ и принимает заданные непрерывные значения $h(\xi)$ на окружности $\{|\xi-z_0|=R\}$ (задача Дирихле для круга).

14.26.1. Доказать, что функция

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)},$$

где R, φ – фиксированы, есть гармоническая функция в круге $|z-z_0|<R$, $z=z_0+re^{i\varphi}$. Разложение функции $u(r,\theta)$ в ряд имеет вид

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)}-1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta-\varphi).$$

Функцию $u(r,\theta)$ называют *ядром Пуассона*.

14.26.2. Найти функцию, гармонически сопряженную к ядру Пуассона, и разложить ее в *ряд Фурье*.

14.27. Показать, что для неотрицательной гармонической в круге $|z-z_0|<R$ функции $u(z)$ верны оценки

$$\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|}u(z_0)\le u(z)\le\frac{R-|z-z_0|}{R-|z-z_0|}u(z_0).$$

14.28. Доказать, что функция

$$u(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)}{|z-\eta|^2}d\eta$$

является гармонической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и принимает заданные ограниченные непрерывные значения $\alpha(x)$ при $\operatorname{Im} z=0$ (задача Дирихле для полуплоскости).

14.29. Найти решение следующих задач Дирихле для круга:

1) $\Delta u(z)=0, |z|<1, u(z)\big|_{|z|=1}=1;$

2) $\Delta u(z)=0, |z|<1, u(z)\big|_{|z|=1}=\cos\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi;$

3) $\Delta u(z)=0, |z|<1,$ $u(z)\big|_{|z|=1}=\dfrac{\sin\varphi}{5+4\cos\varphi}, 0\le\varphi\le 2\pi;$

4) $\Delta u(z)=0, |z|<1,$ $u(z)\big|_{|z|=1}=\sin 2\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi;$

5) $\Delta u(z)=0, x^2+y^2+2x<0,$ $u(z)\big|_{x^2+y^2+2x=0}=4x^3+6x-1.$

14.30. Найти решение следующих задач Дирихле для полуплоскости:

1) $\Delta u(z)=0, \operatorname{Im} z>0, u(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0}=1;$

2) $\Delta u(z)=0, \operatorname{Im} z>0,$ $u(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0}=\dfrac{1}{1+x^2}, z=x+iy;$

3) $\Delta u(z)=0, \operatorname{Im} z>0,$ $u(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & x<1, z=x+iy;\end{cases}$

4) $\Delta u(z)=0, \operatorname{Im} z>0,$ $u(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0}=\dfrac{x}{1+x^2}, z=x+iy;$

5) $\Delta u(z)=0, \operatorname{Im} z>0,$ $u(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0}=\operatorname{sgn}\operatorname{Re} z, z=x+iy.$

14.31. Формулы задач 14.26 и 14.27 носят название *формул Пуассона* для круга и полуплоскости соответственно. С помощью формулы Пуассона для круга решить внешнюю задачу Дирихле для круга $|z-z_0|<R$: найти функцию $u(z)$, гармоничную в области $|z-z_0|>R$, ограниченную на бесконечности и принимающую заданные непрерывные значения $h(\xi)$ на окружности $|\xi-z_0|=R$.

14.32. Показать, что внешнюю задачу Дирихле можно при помощи инверсии $\xi = z/|z|^2$ редуцировать к внутренней задаче Дирихле.

14.33. Построить решение задачи Дирихле для внешности круга $\{|r| \le 1\}$ по краевому условию $u(e^{i\varphi}) = \cos 2\varphi - 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

14.34. Пусть D – ограниченная область на комплексной плоскости, граница которой является кусочно-гладкой кривой Жордана. Доказать следующую формулу Грина:

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy = \int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)|\,dz\,|,$$

где функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в области D и непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$, а $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – производная по направлению внешней нормали к границе ∂D области D.

14.35. Доказать, что функция $u(z)$ является гармонической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда

$$\oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|\,dz\,| = 0$$

по любому замкнутому контуру γ, лежащему в D.

14.36. Проверить следующие равенства:

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log\frac{1}{|\xi - z|}\,d\theta = \begin{cases} \log\dfrac{1}{|z|}, & |z| > R, \\ \log R^{-1}, & |z| \le R; \end{cases}$$

2) $$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{|\xi|<R} \log\frac{1}{|\xi - z|}\,d\xi\, d\eta = \begin{cases} \log\dfrac{1}{|z|}, & |z| > R, \\ \log\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{|z|^2}{R^2}\right), & |z| \le R, \end{cases} \quad \varsigma = \xi + i\eta;$$

3) $$\int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial \eta}\log\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi = \begin{cases} \varphi, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -\varphi, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

где φ, $0<\varphi<\pi$, – угол, под которым виден отрезок $[-a, a\}$ из точки z, а $\zeta=\xi+i\eta$;

$$4)\ \oint_\gamma v(\zeta)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\log\frac{1}{|\zeta-z|}|d\zeta|=\int_\gamma v(\zeta)\,d\arg(\zeta-z),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ – производная по направлению внешней нормали к замкнутому контуру γ, а функция $v(\zeta)$ непрерывна на γ. Если γ – окружность $\{\zeta\colon |\zeta|=R\}$, то предыдущая формула приобретает вид

$$R\int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta})\left.\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\right|_{r=R} d\theta=\int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta})\,d\arg(\zeta-z).$$

14.37. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной на кривой γ. Доказать, что функция

$$u(z)=\int_\gamma \mu(\zeta)\log\frac{1}{|\zeta-z|}|d\zeta|$$

является гармонической вне γ (функция $u(z)$ называется *логарифмическим потенциалом* с плотностью μ). Доказать также, что если γ – окружность и $\mu\equiv 1$, то $u(z)=\text{const}$ внутри γ.

14.38. Пусть D – ограниченная односвязная область и пусть функция $W(z,\zeta)$, $z,\zeta\in D$, при каждом $\zeta\in D$ как функция z конформно отображает область D на круг $|w|<1$, причем точка $z=\zeta$ отображается в точку $w=0$, т. е. $W(\zeta,\zeta)=0$. Доказать, что функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D имеет вид

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\log|W(z,\zeta)|.$$

При этом, если $W(z)$ – какое-нибудь конформное отображение области D на круг $|w|<1$, то функция $W(z,\zeta)$ имеет вид

$$W(z,\zeta)=\frac{W(z)-W(\zeta)}{1-W(z)\overline{W(\zeta)}}.$$

14.39. Пользуясь формулой Грина из задачи 14.34, доказать, что если $u(z)$– гармоническая функция в замыкании $\overline{D}$ ограниченной области D, то для любой точки $z\in D$ справедливо равенство

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\left\{u(\zeta)\frac{\partial \log r}{\partial \mathbf{n}}-\log r\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \mathbf{n}}\right\}|d\zeta|,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – производная по направлению внешней нормали к границе области D, $r=|\zeta-z|$, $\zeta\in\partial D$.

14.40. Задача Дирихле в области D для уравнения Пуассона состоит в том, чтобы найти функцию $u(z)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(z)=F(z), z\in D,$$
$$u(z)\big|_{z\in\partial D}=\varphi(z), z\in\partial D,$$

где $F(z)$, $\varphi(z)$ – заданные непрерывные функции.

Доказать, что функция $u(z)$, удовлетворяющая вышеперечисленным условиям, может быть найдена по формуле

$$u(z)=\iint_D G(z,\zeta)F(\zeta)\,d\xi\, d\eta+\oint_{\partial D}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial \mathbf{n}}\varphi(\zeta)\,|\,d\zeta\,|,$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D.

14.41. Доказать, что необходимым условием разрешимости задачи Неймана для оператора Лапласа в области D является условие

$$\oint_{\partial D}\psi(\zeta)\,d\zeta=0,$$

где $\psi(\zeta)$ – граничное условие для нормальной производной искомой функции.

14.42. Доказать единственность с точностью до аддитивной постоянной задачи Неймана для ограниченной области.

14.43. Найти решение следующей задачи Неймана:

$$\Delta u(z)=0,\ |\,z\,|<1,$$
$$\left.\frac{\partial u(z)}{\partial r}\right|_{r=1}=\varphi(\theta),\ \ z=re^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

14.44. Доказать, что функция $u(z)$ вида

$$u(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\log|\,z-\eta\,|\,d\eta+C(x),$$

где $z = x + iy$, а функция $\varphi(\eta)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и при $\eta \to \infty$ удовлетворяет условию $\varphi(\eta) = O(|\eta|^{-1-\varepsilon})$, является решением следующей задачи Неймана для верхней полуплоскости:

$$\Delta u(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\operatorname{Im} z=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), -\infty < x < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 0.$$

14.45. Сформулировать условия, обеспечивающие единственность задачи Неймана для неограниченной области.

14.46. Показать, что формула

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0) + iC,$$

где $z = x + iy$, $(0, 0) \in D$, восстанавливает аналитическую в односвязной области D функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x, y)$ с точностью до чисто мнимой константы. Эта формула называется *формулой Гурса*.

14.47. Пользуясь формулой Гурса, вывести из формулы Пуассона для круга $\{|z| < 1\}$ *формулу Шварца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta + z)}{(\zeta - z)} \cdot \frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta} + iC.$$

14.48. Пусть функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналитична в круге $\{|z| < R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{|z| \le R\}$. Доказать, что для любого $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < R$, справедливы равенства

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (-b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \cos n\theta \, d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\sin n\theta\, d\theta,\ n = 1, 2, \ldots,$$

или по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta})\sin n\theta\, d\theta,$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta})\cos n\theta\, d\theta,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta,\ b_0 = -v(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta})d\theta.$$

14.48.1. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в области D. Доказать, что в окрестности любой точки (x_0, y_0) функция $u(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора

$$u(x, y) = \sum_{k,l=0}^{+\infty} a_{k,l}(x - x_0)^k (y - y_0)^l,$$

причем ряд сходится абсолютно в области: $|x - x_0| + |y - y_0| \le R$, $0 < R < \rho = \rho(z_0, \partial D)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

14.48.2. Доказать, что частные производные гармонической функции $u(x, y)$ по x и y также являются гармоническими функциями.

14.48.3. Доказать, что продолжение гармонической функции единственно, т. е. если гармоническая в области D функция $u(x, y)$ в некоторой подобласти $G \subset D$ равна нулю, то $u(x, y) \equiv 0$ в области D.

14.48.4. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$ состоит из гармонических функций и сходится равномерно внутри области D. Доказать, что

1) сумма этого ряда есть гармоническая функция в области D;

2) ряд можно дифференцировать почленно, причем сумма ряда из производных также гармонична в D;

3) ряд из производных любого порядка сходится равномерно внутри области D.

14.48.5. Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ функций, аналитических в области D, сходится в точке $z_0 \in D$, а последовательность $\{\mathrm{Re}\, f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри этой области D.

Доказать, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри области D.

14.49. Доказать, что для гармонической в круге $\{|z|<R\}$ и непрерывной в замкнутом круге $\{|z|\le R\}$ функции $u(z)$ справедливо равенство

$$\iint_{|z|<R}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2),$$

где коэффициенты a_n и b_n определены в задаче 14.48.

14.50. Левая часть равенства в предыдущей задаче называется *интегралом Дирихле*. Доказать, что функция

$$u(re^{i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!\theta}{n^2}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

является гармонической в круге $\{|z|<R\}$, принимает непрерывные значения $u(Re^{i\theta})$ на границе этого круга и обладает бесконечным интегралом Дирихле.

14.51. Пусть $\varphi(\zeta)$ – непрерывная действительная функция на границе ∂D области D. Пусть $u(z)$ – любая непрерывно дифференцируемая в области D функция, совпадающая на ∂D с функцией $\varphi(\zeta)$. Доказать, что если существует хотя бы одна такая функция $u(z)$, для которой интеграл Дирихле конечен,

$$D(u)=\iint_D(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy<\infty,$$

то наименьшее значение $D(u)$ достигается на гармонической в области D функции, которая на границе области D совпадает с $\varphi(\zeta)$, т. е. является решением задачи Дирихле.

14.52. Доказать *теорему Харнака*: предел убывающей последовательности гармонических в области D функций является либо гармонической в D функцией, либо тождественно равен $-\infty$.

14.53. Доказать еще одну теорему Харнака: пусть функции $u_k(z)\ge 0$, $k=1, 2, \dots$, и являются гармоническими в области D; тогда если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ сходится хотя бы в одной точке $z\in D$, то он сходится равномерно внутри D.

14.54. Верно ли утверждение, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ из функций, которые гармоничны в D и непрерывны в $\overline{D}$, сходится равномерно в $\overline{D}$, то он сходится равномерно на границе ∂D области D? Имеет ли значение ограниченность области D или утверждение справедливо для любой области D?

14.55. Выписать при $n = 1, 2, 3, 4$ *гармонические полиномы* $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$, определяемые равенством $z^n = p_n + iq_n$, $z = x + iy$. Записать в общем виде $p_n(x, y)$ и $q_n(x, y)$ в полярной системе координат.

14.56. Пусть $V(z)$ ($z = x + iy$) – гармоническая и ограниченная функция в области $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Справедливы ли утверждения:

а) для каждого $t \in \mathbf{R}$ существует

$$\lim_{z \to t, \operatorname{Im} z > 0} V(z) = V(t);$$

б) $V(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{yV(t)}{|z-t|^2}\,dt$, $y > 0$

(сравнить с задачей 14.24).

14.57. Пусть $U(z)$ ($z = x + iy$) – функция, гармоническая в области $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Пусть, кроме того, для некоторого p, $1 < p < \infty$,

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |U(t+iy)|^p\, dt < \infty.$$

Доказать, что существует функция $u(t)$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p dt < \infty,$$

$$U(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t)}{|z-t|^2}\,dt,\ y > 0.$$

14.58. Пусть функция $u(t)$ для некоторого p, $1 \le p < \infty$, удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p\, dt < \infty.$$

Доказать, что функции $U(z)$, $V(z)$, ($z = x + iy$), определенные по формулам

$$U(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t)\,dt}{|z-t|^2},\quad V(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)u(t)\,dt}{|z-t|^2},$$

где $y > 0$, являются сопряженными гармоническими функциями в области $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$.

Глава 15

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основу методов операционного исчисления составляет интегральное преобразование, которое функции $f(t)$ действительного переменного, принимающей комплексные или действительные значения, ставит в соответствие комплекснозначную функцию $F(p)$ комплексной переменной $p \in \mathbf{C}$.

Рассмотрим следующий класс функций $f(t)$ действительного переменного $t \in \mathbf{R}$: 1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$; 2) $f(t)$ непрерывна на любом отрезке действительной оси, за исключением конечного числа точек, в которых функция $f(t)$ имеет разрывы первого рода; 3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $s > 0$, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \le Me^{st}. \qquad (1)$$

Функция $f(t)$, обладающая свойством 3), называется *функцией ограниченной степени роста*, а точную нижнюю грань таких $s > 0$, для которых неравенство (1) выполняется для всех $t > 0$ с какой-нибудь постоянной $M > 0$, называют *показателем степени роста* функции $f(t)$.

Для функций $f(t)$, обладающих свойствами 1) – 3), определим преобразование Лапласа $F(p)$. *Преобразованием Лапласа* функции $f(t)$ называется функция

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, p \in \mathbf{C}.$$

Функцию $f(t)$ называют *оригиналом*, а функцию $F(p)$ – *изображением* или *образом Лапласа* оригинала $f(t)$; символически это записывается так: $F(p) \div f(\mathrm{t}), f(t) \div F(p)$.

Если показатель степени роста $f(t)$ есть s_0, то изображение Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и в этой полуплоскости $F(p)$ является аналитической функцией.

Задача восстановления функции-оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ имеет два аспекта.

1) Пусть известно, что функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, имеющей ограниченную степень роста; тогда задача состоит в восстановлении $f(t)$ по $F(p)$.

2) Необходимо иметь достаточные условия того, что заданная функция комплексного переменного $F(p)$ является изображением Лапласа функции $f(t)$, имеющей ограниченную степень роста.

Пусть $F(p)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ функция, которая является изображением Лапласа кусочно-гладкой функции $f(t)$, имеющей показатель степени роста s_0; тогда в точках непрерывности t справедливо представление

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp, x > s_0. \qquad (2)$$

Этот интеграл берется в смысле главного значения по прямой $\operatorname{Re} p = x$, а формулу (2) принято называть *формулой Мелина*.

Сформулируем достаточные условия разрешимости задачи 2). Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$:

1) является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$;

2) в этой полуплоскости $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$;

3) найдется такая константа $M > 0$, что для всех $\operatorname{Re} p = x > s_0$ справедливо неравенство

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dy < M,$$

тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ является изображением Лапласа функции $f(t)$, определенной равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp, x > s_0.$$

Для функции $f(t)$, такой, что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$, вводится также преобразование Фурье

$$\hat{f}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t} f(t)dt, \eta \in \mathbf{R}.$$

Пусть действительная функция $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$, для некоторого $p > 1$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p\, dt < \infty$. Для $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, рассмотрим функцию

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{z-t}.$$

Эта функция $F(z)$ принадлежит пространству Харди $H^p(\operatorname{Im} z>0)$, причем для каждого $t>0$ существует $\lim\limits_{\substack{z\to t,\\ \operatorname{Im} z>0}}\operatorname{Re}F(z)=u(t)$. Более того, существует

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{|t-x|\geq\varepsilon}\frac{u(t)\,dt}{x-t}=\tilde{u}(x)$$

(т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{x-t}$ существует в смысле главного значения) и $\operatorname{Im} F(t)=\tilde{u}(t)$, где $F(t)=\lim\limits_{\substack{z\to t,\\ \operatorname{Im} z>0}}F(z)$. Таким образом, $F(t)=u(t)+i\,\tilde{u}(t)$. Этот факт и является содержанием известной *теоремы М. Рисса*.

Для функции $u(t)$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, вводится *преобразование Гильберта* по формуле

$$\tilde{u}(x)=\text{v.p.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)\,dt}{x-t}\equiv\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x-t|\geq\varepsilon}\frac{u(t)\,dt}{x-t}.$$

Обозначим это преобразование символом H. Преобразование Гильберта обладает следующими свойствами:

1) $H^2=-I$;

2) H осуществляет изоморфизм $L^p(\mathbf{R})$ на $L^p(\mathbf{R})$, $p>1$, и справедливо неравенство

$$c'_p\int_{-\infty}^{\infty}|u|^p\,dt\leq\int_{-\infty}^{\infty}|Hu|^p\,dx\leq c''_p\int_{-\infty}^{\infty}|u|^p\,dt;$$

3) в случае $p=2$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Hu|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2\,dt.$$

Для действительнозначной функции $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, имеющей компактный носитель на $\mathbf{R}_+=\{x\colon x>0\}$ и являющейся бесконечно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, определим функцию комплексного переменного z по формуле

$$Mf(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}f(x)\,dx.$$

Функция $Mf(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Преобразование, осуществляемое этим интегралом, назовем *преобразованием Мелина*. Это преобразование распространяется на все пространство $L^2(\mathbf{R}_+)$ как ограниченный линейный оператор из $L^2(\mathbf{R}_+)$ в $L^2(\mathrm{Re}\, z = 1/2)$. При этом M суть изометрия между этими пространствами и справедливо равенство

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{\mathrm{Re}\, z=1/2} |Mf(z)|^2 |dz|.$$

Обратное преобразование Мелина вводится по формуле

$$f(x) = \int_{\mathrm{Re}\, z=1/2} x^{-z} Mf(z)\, dz.$$

15.1. Пусть функция $f(t)$ имеет показатель степени роста s_0. Доказать, что

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

сходится в области $\mathrm{Re}\, p > s_0$, а для любого $s > s_0$ этот интеграл сходится равномерно в области $\mathrm{Re}\, p \geq s > s_0$.

15.2. Пусть функция $f(t)$ имеет показатель степени роста s_0. Доказать, что ее изображение Лапласа $F(p)$ аналитично в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$.

15.3. Показать, что изображение Лапласа $F(p) \to 0$ при $\mathrm{Re}\, p \to +\infty$. В частности, если $F(p)$ аналитична в точке $p = \infty$, то $F(p)$ имеет в бесконечности нуль.

15.4. Пусть функция $f(t) = 0$ при $t < 0$ и при некотором $p_0 \in \mathbf{C}$ существует интеграл $\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt$. Доказать, что для любого $p \in \mathbf{C}$: $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0$ интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ сходится. Этот интеграл, как отмечалось в начале главы, принято называть *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$.

15.5. Пусть $f(t) = 0$ при $t < 0$ и $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$. Доказать, что $f(t)$ имеет показатель степени роста, равный нулю.

15.6. Считая, что функция-оригинал $f(t) = 0$ при $t < 0$, вычислить показатель степени роста $f(t)$ и доказать утверждения:

1) $1 \div p^{-1}$; 2) $e^{at} \div (p-a)^{-1}$, $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$;

3) $t^{\nu} \div \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\nu > -1$, $\mathrm{Re}\, p > 0$;

4) $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}$, $\operatorname{Re}p>0$;

5) $\sin\omega t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|$;

6) $\cos\omega t \div \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|$;

7) $\operatorname{sh}\lambda t \div \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Re}\lambda|$;

8) $\operatorname{ch}\lambda t \div \frac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Re}\lambda|$.

15.7. Пусть $F_j(p)\div f_j(t)$, $\operatorname{Re}p>s_j$, $j=1,\dots,n$. Доказать, что

$$\sum_{j=1}^n a_jF_j(p)\div\sum_{j=1}^n a_jf_j(t),\ \operatorname{Re}p>\max_{1\le j\le n}s_j.$$

Это свойство изображения называется *линейностью*.

15.8. Пусть $F(p)\div f(t)$, $\operatorname{Re}p>s_0$; доказать, что тогда

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)\div f(at),\ a>0, \operatorname{Re}p>as_0.$$

15.9. Пусть $F(p)\div f(t)$, $\operatorname{Re}p>s_0$. Доказать теорему запаздывания, т. е.

$$e^{-p\tau}F(p)\div f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau, \tau>0,\\ f(t-\tau), & t>\tau.\end{cases}$$

15.10. Пусть $f'(t)$ и $f(t)$ имеют показатель степени роста s_0 и $f(t)\div F(p)$, $\operatorname{Re}p>s_0$. Доказать, что

$$f'(t)\div pF(p)-f(0),\ \operatorname{Re}p>s_0.$$

15.11. Пусть $f^{(n)}(t),\dots,f^{(1)}(t),f(t)$ имеют показатель степени роста s_0 и $f(t)\div F(p)$, $\operatorname{Re}p>s_0$. Доказать, что

$$f^{(n)}(t)\div\left\{F(p)-\frac{f(0)}{p}-\frac{f^{(1)}(0)}{p^2}-\dots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right\}.$$

15.12. Пусть $f(t)\div F(p)$, $\operatorname{Re}p>s_0$. Доказать, что:

1) $\int_0^t f(\tau)d\tau \div p^{-1}F(p), \operatorname{Re} p > s_0$;

2) $\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \div p^{-n}F(p), \operatorname{Re} p > s_0$.

15.13. Пусть $f_1(t) \div F_1(p), \operatorname{Re} p > s_1$; $f_2(t) \div F_2(p), \operatorname{Re} p > s_2$.

Доказать, что

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \div F_1(p)F_2(p), \operatorname{Re} p > \max(s_1, s_2).$$

15.14. Пусть $F(p) \div f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Доказать, что:

1) $F'(p) \div -t f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$;

2) $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$.

15.15. Пусть функции $f(t)$ и $t^{-1}f(t)$ имеют показатель степени роста s_0, $\operatorname{Re} p > s_0$. Доказать, что

$$t^{-1}f(t) \div \int_p^\infty F(q)\, dq, \ \operatorname{Re} p > s_0.$$

15.16. Пусть $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Доказать, что:

$$F(p+\lambda) \div e^{-\lambda t} f(t), \ \operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re}\lambda.$$

15.17. Пусть функции $f_1(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, имеют соответственно показатели степени роста s_1 и s_2,

$$F_1(p) \div f_1(t), \operatorname{Re} p > s_1, \quad F_2(p) \div f_2(t), \operatorname{Re} p > s_2.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz \div f_1(t) f_2(t),$$

где $a > s_1$, $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

15.18. Считая, что функция-оригинал $f(t) = 0$ при $t < 0$, доказать следующие утверждения:

1) $t^n e^{at} \div \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$;

2) $t \sin \omega t \div \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$;

3) $t \cos \omega t \div \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$;

4) $e^{\lambda t}\sin\omega t \div \dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\omega|;$

5) $e^{\lambda t}\cos\omega t \div \dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\omega|;$

6) $\dfrac{\sin\omega t}{t} \div \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{\omega}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|;$

7) $|\sin\omega t| \div \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\dfrac{p\pi}{2\omega}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|;$

8) $\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}} \div \dfrac{1}{\sqrt{p+a}},\ \operatorname{Re} p > -a.$

15.19. Пусть $\Phi(p) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^p e^{-z^2}\,dz$ – так называемая *функция ошибок*. Доказать, что:

1) $e^{-a^2t^2} \div \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{p^2/(4a^2)}\left(1-\Phi\left(\dfrac{p}{2a}\right)\right);$

2) $e^{-2a\sqrt{t}}/(\sqrt{\pi t}) \div \dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{a^2/p}\left(1-\Phi\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)\right);$

3) $\dfrac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}} \div \Phi(t\sqrt{a});$

4) $p^{-1}e^{-a\sqrt{p}} \div 1-\Phi\left(\dfrac{a}{2\sqrt{i}}\right).$

15.20. Пусть $F(p)$ – функция, аналитическая в точке $p = \infty$, и ее лорановское разложение в бесконечности имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{-n}.$$

Доказать, что функция $F(p)$ есть изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_{n+1}}{n!}t^n, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

15.21. *Функцией Бесселя* $J_n(z)$ *первого рода* порядка $n \in \mathbf{Z}$ называется решение дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2\omega}{dz^2}+z\frac{d\omega}{dz}+(z^2-n^2)\omega=0,$$

которое представляется степенным рядом

$$J_n(z)=(z/2)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}.$$

Доказать, что:

1) $J_0(at)\div\dfrac{1}{\sqrt{a^2+p^2}}$; 2) $J_0(2\sqrt{t})\div p^{-1}e^{-p^{-1}}$;

3) $J_n(t)\div\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$.

15.22. Пусть $F(p)=A(p)B^{-1}(p)$ – рациональная функция, причем степень алгебраического многочлена $A(p)$ меньше степени алгебраического многочлена $B(p)$, имеющего простые корни $p_1, p_2, \ldots, p_n\in\mathbf{C}$. Доказать, что оригиналом $F(p)$ является функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_kt}.$$

15.23. Пусть $f(t)\div F(p)$. Доказать, что $\lim\limits_{p\to\infty}pF(p)=f(+0)$, а если существует $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=f(\infty)$, то $\lim\limits_{p\to0}pF(p)=f(\infty)$.

15.24. Пусть $F(p)$ – рациональная функция, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p>a_0$, для которой выполнены следующие условия:

1) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|F(a+ib)|\,db$ сходится для любого $a>a_0$;

2) $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{p\in\Gamma_R}|F(p)|=0$, где Γ_R – дуга окружности $|p|=R$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Re} p>a_0$. Доказать, что оригиналом для функции $F(p)$ является функция $f(t)=\sum_k\operatorname*{res}\limits_{p_k}[F(p)e^{pt}]$, где p_k – нули знаменателя функции $F(p)$.

15.25. Пусть $F(p)=A_n(p)\,/\,B_m(p)$, где $A_n(p)$ и $B_m(p)$ – алгебраические многочлены степени n и m соответственно, причем $n<m$ и $A_n(p)$ и $B_m(p)$ не имеют общих нулей. Доказать, что если

$p_1, p_2, \ldots, p_l$ – нули $B_m(p)$ кратности $m_1, m_2, \ldots, m_l$ соответственно, то

$$F(p) \div f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \frac{d^{m_k-1}}{d^{m_k-1} p} [(p-p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}]_{p=p_k}.$$

15.26. Найти изображение $F(p)$ для функции $f(t)$:

1) $f(t) = t^{\beta}$, $\beta > -1$;

2) $f(t) = t^n e^{\lambda t}$, $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{C}$;

3) $f(t) = t^n \sin \omega t$, $n \in \mathbf{N}$, $\omega \in \mathbf{C}$;

4) $f(t) = e^{\lambda t} \cos \omega t$, $\lambda, \omega \in \mathbf{C}$;

5) $f(t) = (n+1)h$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n = 0, 1, \ldots, \tau, h > 0$.

15.27. Найти изображение Лапласа $F_h(p)$ функции

$$f_h(t) = \begin{cases} h^{-1}, & 0 < t < h, \\ 0, & t \geq h. \end{cases}$$

Найти $\lim\limits_{h \to +0} F_h(p)$. Этот предел называют *преобразованием Лапласа* функции $\delta(t)$. Доказать, что:

1) $\delta(t) \div 1$; 2) $\delta^{(n)}(t) \div p^n$, $n \in \mathbf{N}$.

15.28. Найти оригинал $f(t)$ для функции $F(p)$:

1) $F(p) = p^{-\alpha-1}$, $-1 < \alpha < 0$;

2) $F(p) = p^{-1} e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha > 0$;

3) $F(p) = p^{-n-1} e^{-p-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

4) $F(p) = (p^2 + 1)^{-1/2}$.

15.29. Вычислить интегралы:

1) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{\xi^{n+1}} d\xi$; 2) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{t^{\xi}}{\xi^{n+1}} d\xi$; 3) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$;

4) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{\xi^2+1} d\xi$; 5) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\xi e^{\xi t}}{\xi^2+1} d\xi$; 6) $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{\xi^2(\xi^2+1)} d\xi$.

15.30. Доказать, что если $f(z) \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to \infty$, $a_1 < \operatorname{Re} z < a_2$, и $f(z)$ аналитична в полосе $a_1 < \operatorname{Re} z < a_2$, то $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(\xi) d\xi$ не зависит от a, $a_1 < a < a_2$.

15.31. Рассмотрим *задачу Коши*

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = 0, \\ y(0) = y_0,\ y^{(1)}(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные постоянные.

Если $\{\psi_k(t)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ – фундаментальная система решений, т. е.

$$a_0 \psi_k^{(n)}(t) + a_1 \psi_k^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n \psi_k(t) = 0,$$

$$\psi_k^{(j)}(0) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j;\ k, j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

то, как известно, решение задачи Коши имеет вид $y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \psi_k(t)$.

Пусть

$$\psi_k(t) \div \psi_k(p),\ P_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$P_k(p) = a_0 p^{n-(k+1)} + a_1 p^{n-(k+2)} + \ldots + a_{n-(k+1)}.$$

Доказать, что:

1) $\psi_k(p) = \dfrac{P_k(p)}{P_n(p)},\ p = 0, 1, \ldots, n-1;$

2) $\psi_h(t) = \sum_{j=0}^{m} \operatorname{res}_{p_j} \left(e^{pt} \dfrac{P_k(p)}{P_n(p)} \right),$

где p_j, $j = 1, \ldots, m$, – нули полинома $P_n(p)$.

15.32. Решить задачу Коши

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1.$$

15.33. Решить задачу Коши

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = 0,\ \lambda \neq 0,$$

$$x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta.$$

15.34. Рассмотрим задачу Коши

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t),$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные постоянные.

Пусть $y(t) \div Y(p)$, $f(t) \div F(p)$, а $\psi_{n-1}(t)$ есть $(n-1)$-я функция из фундаментальной системы решений в задаче 15.31 – эту функцию называют *функцией единичного точечного источника*.

Доказать, что:

1) $Y(p) = \dfrac{F(p)}{P_n(p)}$,

2) $y(t) = \dfrac{1}{a_0} \int_0^t \psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$,

где $P_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$.

15.35. Решить задачу Коши

$$y''(t) + y(t) = \sin t,\ y(0) = y'(0) = 0.$$

15.36. Решить задачу Коши:

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$

2) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3 e^{-2t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2;$

3) $x^{\mathrm{IV}}(t) + 2x''(t) + x(t) = \sin t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$

4) $x''(t) + \omega^2 x(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0.$

15.37. Решить системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2e^t, \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 1;$

2) $\begin{cases} x''(t) - x(t) + y(t) + z(t) = 0, \\ y''(t) + x(t) - y(t) + z(t) = 0, \\ z''(t) + x(t) + y(t) - z(t) = 0, \end{cases}$

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0;$

3) $\begin{cases} x'(t) + y(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \\ y'(t) + x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 0;$

$$4)\ \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t), \\ y'(t) = z(t) + x(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t), \end{cases}$$

$x(0) = -1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

$$5)\ \begin{cases} x'(t) - ax(t) - by(t) = be^{at}, \\ y'(t) + bx(t) - ay(t) = 0, \end{cases}$$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

15.38. Решить интегральные уравнения относительно непрерывной функции $\varphi(t)$:

$$1)\ \varphi(t) = \int_0^t (t-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \sin t;$$

$$2)\ t = \int_0^t e^{t-\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

15.39. Решить интегральные уравнения Вольтерра относительно непрерывной функции $\varphi(t)$:

$$1)\ f(t) = \int_0^t K(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi;$$

$$2)\ \varphi(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Вольтерра первого и второго рода* соответственно.

15.40. Решить уравнения в частных производных:

$$1)\ \begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \\ \qquad u\big|_{t=0} = \sin \pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \\ \qquad u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=1} = \sin \omega t; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} u_{xx} + u_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u\big|_{t=0} = x, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin x; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} u_{xx} + u_{tt} = 1, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u_t\big|_{t=0} = x^2 e^{-x}. \end{cases}$$

15.41. Найти ограниченные при $x \geq 0$ решения $u(x, t)$ уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},\ x>0,\ t>0, u_t\big|_{t=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = f(t).$$

15.42. Решить уравнения

1) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 3xt^2,\ 0 \le x \le 1,\ t>0,$

$$u(x,0) = x^3,\ u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = t^4,\ u(1,t) = 1;$$

2) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3 \partial t} + 3\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + 3\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} = x^2 e^x,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ x>0,\ t>0.$

15.43. Решить уравнения:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ a>0,\ x>0,\ t>0,$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0,\ u_x(t,0) = V\delta(t-T),\ V \ne 0,\ T>0;$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + au_t,\ a>0,\ x>0,\ t>0,$
$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,\ u_x(t,0) = V\delta(t-T),\ V \ne 0, T>0.$

15.44. Используя преобразование Фурье, решить задачи:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x);$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0;$

3) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ u(x,0) = \varphi(x);$

4) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ u(x,0) = 0.$

Решение $u(x,t)$ определено в полуплоскости $x \in \mathbf{R},\ t>0.$

15.45. Используя преобразование Фурье, решить задачи:

1) $u_t = a^2 u_{xx},\ \ u(0,t) = \mu(t),\ u(x,0) = 0;$

2) $u_t = a^2 u_{xx},\ \ u_x(0,t) = \nu(t),\ u(x,0) = 0;$

3) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ u(0,t) = u(x,0) = 0.$

Решение $u(x,t)$ определено в области $0 < x < \infty,\ t>0.$

15.46. Используя преобразование Фурье, решить задачи:

1) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ \ u(x,y,0) = \varphi(x,y);$

2) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),\ \ u(x,y,0) = 0.$

Решение $u(x,y,t)$ определено в полупространстве $(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ t>0.$

15.47. Используя преобразование Фурье, решить задачи:

1) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ \ u(x,0,t) = 0,\ u(x,y,0) = f(x,y);$

2) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ \ u(x,0,t) = f(x,t),\ u(x,y,0) = 0;$

3) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ \ u_y(x,0,t) = 0,\ u(x,y,0) = f(x,y).$

Решение $u(x,y,t)$ определено в области $x \in \mathbf{R},\ y>0,\ t>0.$

15.48. Используя преобразование Лапласа, решить задачи:

$$1)\ \begin{cases} u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x), \\ u(0, y) = u_x(0, y) = 0,\ \ x > 0,\ \ y > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} u_y = u_{xx} + u + B\cos x, \\ u(0, y) = Ae^{-3y}, u_x(0, y) = 0, x > 0, y > 0. \end{cases}$$

15.49. Начальная температура (при $t = 0$) тонкого однородного стержня равна нулю. Определить температуру $u(x, t)$ стержня при $t > 0$:

1) стержень имеет конечную длину l, т. е. $0 < x < l$ и

$$u(+0, t) = \delta(t),\ \ u(l - 0, t) = 0;$$

2) стержень полубесконечен, т. е. $0 < x < \infty$ и

$$u(+0, t) = \delta(t),\ \ u(\infty, t) = 0;$$

3) стержень полубесконечен, т. е. $0 < x < \infty$ и

$$u(+0, t) = \mu(t),\ \ u(\infty, t) = 0.$$

15.50. Доказать, что преобразование Гильберта H_f функции $f \in L^p(\mathbf{R})$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f = 0$ п. в.

15.51. Доказать, что для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} | Hf(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} | f(t)|^2\, dt,$$

т. е. H осуществляет изометрию пространства $L^2(\mathbf{R})$.

15.52. Пусть $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, $q < \infty$, функция $u \in L^p(\mathbf{R})$, а функция $v \in L^q(\mathbf{R})$. Доказать, что справедливы равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} Hu(x)Hv(x)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)Hv(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} Hu(x)v(x)\, dx,$$

причем интегралы сходятся абсолютно.

15.53. Вычислить преобразование Гильберта для функции

$$k_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0, \\ 1/t, & |t| > \varepsilon,\ \varepsilon > 0. \end{cases}$$

15.54. Для функции $f \in L^p(\mathbf{R})$, $p > 1$, определим свертку с функцией $k_\varepsilon(t)$ из предыдущей задачи по формуле

$$(T_\varepsilon f)(x) = k_\varepsilon * f \equiv \frac{1}{\pi}\int_{|t-x|\ge\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt.$$

Доказать, что существует положительная константа c, зависящая только от p, такая, что

$$\|T_\varepsilon f\|_p \le c\|f\|_p, \text{ где } \|f\|_p \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f|^p dt\right)^{1/p}.$$

15.55. Пусть действительная функция $u \in L^p(\mathbf{R})$, $p > 1$. Доказать, что функция

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{z-t}dt, \ \operatorname{Im} z > 0, \ z = x + iy,$$

принадлежит пространству Харди H^p ($\operatorname{Im} z > 0$).

15.56. Доказать, что для функции $F(z)$ из предыдущей задачи существует $\lim\limits_{z\to t,\, \operatorname{Im} z>0} F(z) = F(t)$ и при этом $F(t) = u(t) + iHu(t)$.

15.57. Доказать, что для бесконечно-дифференцируемой функции f с компактным носителем на $\mathbf{R}_+$ преобразование Мелина Mf есть функция, аналитическая во всей комплексной плоскости.

15.58. Пусть $f(x)$ – бесконечно-дифференцируемая функция с компактным носителем на $\mathbf{R}_+$. Доказать, что

$$(Mf')(z) = (z-1)(Mf)(z-1).$$

15.59. Пусть $\operatorname{Re} z \in (0, 1)$, $\operatorname{Re} \omega \in (0, 2\pi)$. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x^{i\omega}-1}dx = -\frac{\pi}{\sin z\pi}e^{i(\omega-\pi)z}.$$

15.60. Пусть $\operatorname{Re} z \in (0, 1)$. Доказать, что

$$\text{v.p.}\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x-1}dx = -\frac{\pi}{\sin z\pi}e^{-i\pi z}.$$

15.61. Пусть функция f бесконечно-дифференцируема и имеет компактный носитель на $\mathbf{R}_+$. Для любого $\omega \in (0, 2\pi)$ рассмотрим оператор

$$A_\omega f(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{ye^{i\omega}-x}dy, \ x \in \mathbf{R}_+.$$

Доказать, что $M(A_\omega f)(z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z} e^{i(\omega - z)\pi} e^{-i\omega} Mf(z).$

15.62. Доказать, что

$$M(A_0 f)(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} e^{-iz\pi} Mf(z),$$

если

$$A_0 f(x) = \text{v.p.}\int_0^\infty \frac{f(y)}{y-x} dy, \ x \in \mathbf{R}_+.$$

15.63. Доказать, что для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \, dx = \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} |Mf(z)|^2 |dz|.$$

Глава 16
НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Пусть D – неограниченное множество комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $f(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на D. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ (возможно, расходящийся) называется *степенным асимптотическим разложением* функции $f(z)$ на D, если для любого целого $N \geq 0$ при $z \to \infty$, $z \in D$, справедливо равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + o(z^{-n}),$$

где a_n – комплексные постоянные.

Это записывается так:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} .$$

Если такое разложение возможно, то оно единственно, т. е. коэффициенты a_n определяются по функции $f(z)$ однозначно. Обратное неверно – две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

Асимптотические разложения можно почленно складывать и перемножать по Коши.

Если

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},$$

то

$$(f(z) \pm g(z)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^{-n},$$

$$f(z) \cdot g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^{-n}.$$

Если функция аналитична в области $D = \{z: |z| > R,\ \alpha < \arg z < \beta,\ 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ и имеет асимптотическое разложение при $z \to \infty$, $z \in D$, следующего вида:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} ,$$

то для производной $f'(z)$ справедливо асимптотическое разложение

$$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1},\ z \to \infty.$$

Кроме того, для функции $F(z)=\int_z^\infty \left(f(\xi)-a_0-\frac{a_1}{\xi}\right) d\xi$, где интеграл берется вдоль любого пути, лежащего в D, справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$F(z)\sim \sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{n-1} z^{-n+1}.$$

Аналогично степенному асимптотическому разложению можно ввести асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, т. е. последовательности, удовлетворяющей при любом целом $n \geq 0$ условию

$$\varphi_{n+1}(z)=o(\varphi_n(z)),\quad z\to a$$

где точка a является предельной для множества M, на котором определены функции $\varphi_n(z)$. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^\infty \varphi_n(z)$ (возможно, расходящийся) называется *асимптотическим разложением* функции $f(z)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если для любого целого $N \geq 0$ при $z\to a$, $z\in M$, справедливо равенство

$$f(z)=\sum_{n=0}^N a_n\varphi_n(z)+o(\varphi_n(z)),$$

где a_n – комплексные постоянные. Это записывается так:

$$f(z)\sim \sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(z).$$

Метод Лапласа. Пусть функции $f(x)$ и $S(x)$ действительного переменного x непрерывны на $[a, b]$, аналитичны в окрестности некоторой точки $x_0\in(a, b)$. Пусть, кроме того, функция $S(x)$ принимает только действительные значения и достигает в точке x_0 максимум, причем $S(x) < S(x_0)$, $x\neq x_0$, $S''(x_0)\neq 0$. Тогда при $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\leq \pi/2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\equiv \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx \sim e^{\lambda S(x_0)}\sum_{n=0}^\infty a_n\lambda^{-(n+1/2)},$$

которое можно дифференцировать почленно любое число раз. Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,e^{\lambda S(x_0)}[f(x_0+O(\lambda^{-1})],$$

где берется соответствующее значение корня и оценка в правой части равномерна по $\lambda\in\{|\arg\lambda|\le\pi/2-\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$.

Если выполнены условия, при которых справедливо предыдущее асимптотическое разложение, за исключением того, что функция $S(x)$ достигает максимума в конце a отрезка, причем $S'(a)\ne 0$, то для функции $F(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\le\pi/2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda S(a)}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^{-(n+1)},$$

которое можно дифференцировать почленно любое число раз. Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=\frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}[f(a)+O(\lambda^{-1})].$$

Метод стационарной фазы. Пусть функции $f(z)$ и $S(x)$ действительного переменного x бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, $S(x)$ принимает только действительные значения и $S'(x)\ne 0$ на $\{a, b]$. Тогда при $\lambda\to+\infty$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$F(\lambda)\equiv\int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx\sim\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}[e^{i\lambda S(b)}-a_ne^{i\lambda S(a)}](i\lambda)^{-n-1},$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Bigg|_{x=a},$$

$$b_n=(-1)^n\left(\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Bigg|_{x=b}.$$

Это разложение можно почленно дифференцировать по λ любое число раз.

Если функция $S(x)$ имеет на (a, b) единственную невырожденную стационарную точку x_0, т. е. $S'(x_0)=0$, $S''(x_0)\ne 0$, то при $\lambda\to+\infty$ справедлива формула

$$F(\lambda) = e^{i[\lambda S(x_0) + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)]}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} f(x_0) + O(\lambda^{-1})\right).$$

Метод перевала. Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) \equiv \int_\gamma f(z) e^{\lambda S(z)} dz,$$

где γ – кусочно-гладкая кривая Жордана, а функции $f(z)$ и $S(z)$ аналитичны в некоторой области $D \in \mathbf{C}$, содержащей γ. Поскольку функции $f(z)$ и $S(z)$ аналитичны в D, то можно деформировать кривую γ в D, оставляя неподвижными концы γ и не меняя значения интеграла $F(\lambda)$. Предположим, что при деформировании можно получить такую кривую γ, что выполнены условия:

1) $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке $z_0 \in \gamma$, которая является внутренней для γ;

2) $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$ при $z \in \gamma$ в окрестности точки z_0.

Пусть, кроме того, $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$, и в окрестности точки z_0 кривая γ проходит через оба сектора, в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $\lambda\to\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(z_0)}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} f(z_0) e^{i\theta_k} + O(\lambda^{-3/2})\right),$$

где $\theta_k = (\pi - \arg S''(z_0))/2 + k\pi$, $k = 0$ или 1 и выбор зависит от направления интегрирования вдоль γ.

16.1. Пусть функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},\ z \to \infty.$$

Доказать, что для каждого $n \geq 0$ справедлива формула

$$a_n = \lim_{z\to\infty} z^n [f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-k}.$$

16.2. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет степенное асимптотическое разложение при $x \to +\infty$, то функция $f(x) + e^{-x}$ имеет то же степенное асимптотическое разложение.

16.3. Функция $f(x) = e^{-x}\sin(e^x)$ при $x \to +\infty$ имеет следующее степенное асимптотическое разложение:

$$e^{-x}\sin(e^x)\sim 0,\ x\to+\infty.$$

Можно ли данное асимптотическое разложение дифференцировать?

16.4. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны при $t\ge a$, функция $g(t)>0$ при $t\ge t_0>a$ и $\int_a^\infty g(t)\,dt=+\infty$. Доказать, что из условия $f(t)\sim g(t)$ при $t\to+\infty$ следует, что при $x\to+\infty$

$$\int_a^x f(t)\,dt\sim\int_a^x g(t)\,dt.$$

16.5. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Доказать, что из соотношения $f(t)=o(g(t))$ при $t\to+\infty$ следует, что при $x\to+\infty$

$$\int_a^x f(t)\,dt=o\Bigl(\int_a^x g(t)\,dt\Bigr),$$

а из соотношения $f(t)=O(g(t))$ при $t\to+\infty$ следует, что при $x\to+\infty$

$$\int_a^x f(t)\,dt=O\Bigl(\int_a^x g(t)\,dt\Bigr).$$

16.6. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны при $t\ge a$, $g(t)>0$ при $t\ge t_0>a$ и $\int_a^x g(t)\,dt<\infty$. Доказать, что тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $f(t)\sim g(t)$ при $t\to+\infty$, то при $x\to+\infty$

$$\int_x^\infty f(t)\,dt\sim\int_x^\infty g(t)\,dt;$$

2) если $f(t)=O(g(t))$ при $t\to+\infty$, то при $x\to+\infty$

$$\int_x^\infty f(t)\,dt=O\Bigl(\int_x^\infty g(t)\,dt\Bigr);$$

3) если $f(t)=O(g(t))$ при $t\to+\infty$, то при $x\to+\infty$

$$\int_x^\infty f(t)\,dt=O\Bigl(\int_x^\infty g(t)\,dt\Bigr).$$

16.7. Пусть функция $f(x)$ монотонна при $x\ge 0$. Доказать, что при $n\to+\infty$

$$\sum_{k=0}^n f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+O(f(n))+O(1).$$

16.8. Доказать, что при $n \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические равенства:

1) $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \begin{cases} \ln n, & \alpha = -1, \\ n^{\alpha+1}/(\alpha+1), & \alpha > -1; \end{cases}$

2) $\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha} (\ln k)^{\beta} \sim \begin{cases} (\ln n)^{\beta+1}/(\beta+1), & \alpha = -1, \beta > -1, \\ n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}/(\alpha+1), & \alpha > -1, \beta - \text{любое}. \end{cases}$

16.9. Доказать, что при $n \to +\infty$ справедливы оценки:

1) $\sum_{k=1}^{n} \sin kx \ln k = O(\ln n)$;

2) $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sin kx = O(n^{\alpha})$, $\alpha \geq 0$,

которые равномерны по $x \notin (\pi l - \varepsilon, \pi l + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ и фиксировано, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

16.10. Пусть $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$. Доказать, что при $x \to +\infty$

$$F(x) = x^2/2 + (\ln x)/2 + O(1).$$

16.11. Пусть $F(x) = \int_0^x \sqrt{v(t) + k^2}\, dt$, где функция $v(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ непрерывна и $\int_0^{\infty} \sqrt{v(t)}\, dt < \infty$. Доказать, что при $x \to +\infty$

$$F(x) = |k|\, x + \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{\sqrt{v(t)+k^2} + |k|}\, dt + o(1)$$

где k – произвольная действительная константа.

16.12. Пусть функция $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой при $t \in [0,]$. Доказать, что при $\varepsilon \to +0$

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t+\varepsilon}\, dt = -f(0) \ln \varepsilon + O(1).$$

16.13. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Доказать, что при $\varepsilon \to +0$

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + \varepsilon^2}\, dt = +\frac{f(0)}{2} \frac{\pi}{\varepsilon} + O(\ln \varepsilon).$$

16.14. Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_1^{\infty} x^{\alpha} e^{-\varepsilon x^{\beta}}\, dx,$$

где $\varepsilon > 0$, α и β – действительные числа и $\beta > 0$. Доказать, что при $\varepsilon \to +0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

1) $F(\varepsilon) \sim -\dfrac{1}{\beta}\ln\varepsilon$ при $\alpha = -1$;

2) $F(\varepsilon) \sim -\dfrac{1}{\beta}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta}\right)\varepsilon^{-(\alpha+1)/\beta}$ при $\alpha > -1$.

16.15. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на отрезке $[0, 1]$ и пусть число $\beta < 0$. Доказать, что при $\varepsilon \to +0$

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} e^{-\varepsilon x^\beta}\, dx = -\frac{f(0)}{\beta}\ln\varepsilon + O(1).$$

16.16. Пусть функция $f(z)$ аналитична при $z \in \{z\colon |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, а числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, удовлетворяют условию $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$. Пусть также $f(z)$ имеет асимптотическое разложение

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},\ \operatorname{Re} z \to +\infty, |\operatorname{Im} z| < \pi/2.$$

Доказать, что

$$f'(z) \sim -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n z}, \operatorname{Re} z \to +\infty, |\operatorname{Im} z| < \pi/2.$$

16.17. Доказать, что при $z \to \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, справедливо асимптотическое разложение

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{z+t}\,dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}.$$

16.18. Доказать, что при $x \to +\infty$

$$\int_x^\infty t^{-1} e^{x-t}\, dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

16.19. Пусть (a, b) – конечный или бесконечный интервал, функция $S(x)$ для любого $x \in (a, b)$ удовлетворяет условию $S(x) \le c_0$ и при некотором $\lambda = \lambda_0 > 0$ сходится интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx.$$

Доказать, что при любом λ, удовлетворяющем условию $\operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_0$, справедлива оценка

$$F(\lambda) = O(e^{c_0 \operatorname{Re}\lambda}).$$

16.20. Пусть функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной при $x \geq 0$ и бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$. Доказать, что при $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, справедливо следующее асимптотическое разложение для преобразования Лапласа функции $f(x)$:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}\,dx \sim \sum_{n=0}^\infty f^{(n)}(0)\lambda^{-n-1},$$

где функция $f(x)$ удовлетворяет при $x > 0$ условию

$$|f(x)| \leq M\,e^{cx}, \quad c \geq 0.$$

16.21. Пусть $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ – интеграл вероятности. Доказать, что при $x \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\Phi(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x} - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k(2k-1)!}{2^k x^{2k}}.$$

16.22. *Лемма Ватсона*. Пусть $\alpha, \beta > 0$, функция $f(t)$ непрерывна при $t \in [0,\ a]$ и бесконечно дифференцируема в окрестности $t = 0$. Доказать, что при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\int_0^\alpha t^{\beta-1}e^{-\lambda t^\alpha} f(t)\,dt \sim \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-(n+\beta)/\alpha}\,\frac{\Gamma((n+\beta)/\alpha)}{n!}\,f^{(n)}(0).$$

16.23. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности $x = 0$, и пусть интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}dx$$

абсолютно сходится при некотором $\lambda_0 > 0$. Доказать, что для функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, справедливо асимптотическое разложение из задачи 16.20.

16.24. Пусть функция $g(x)$ аналитична и ограничена в области, включающей действительную ось. Доказать, что при $\lambda \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\int_{-\infty}^\infty g(t)\,e^{-\lambda t^2/2}dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{\lambda^n}\,a_{2n},$$

где коэффициенты a_{2n} берутся из ряда Тейлора для функции $g(z)$ в окрестности точки $z = 0$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

16.25. *Функция Макдональда* $K_0(x)$ определена равенством

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t(t+2)}}\, dt .$$

Доказать, что при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$K_0(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

16.26. Доказать, что функция Макдональда $K_0(x)$ может быть представлена в виде

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt .$$

16.27. Пусть $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\, dt$, $x > -1$, есть функция Эйлера. Доказать, что при $x \to +\infty$

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Получить отсюда *формулу Стирлинга*

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

16.28. Используя равенство

$$n \int_0^{\infty} e^{-nx} (1+x)^n\, dx = 2 + \sum_{k=2}^{n} (1 - 1/n) \cdot \ldots \cdot (1 - (k-1)/n)$$

и формулу Стирлинга, показать, что при $n \to \infty$

$$F(n) = \sqrt{\pi n / 2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

16.29. Показать, что при $n \to \infty$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt = \sqrt{\pi / 2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

16.30. Показать, что при $n \to \infty$

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \sim \sqrt{\pi / n} .$$

16.31. Найти асимптотическое поведение при $t \to \infty$ функции

$$F(t)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^{\alpha}x}dx,$$

где α – произвольное действительное число.

16.32. Доказать, что если >0, то при $t\to\infty$

$$\int_0^{\infty}x^{-\alpha x}x^{t}dx\sim\sqrt{\frac{2\pi}{e^{\alpha}}}\,t^{\frac{1}{2\alpha}}e^{\frac{\alpha}{e}t^{1/\alpha}}.$$

16.33. Доказать *лемму Римана–Лебега*: пусть существует интеграл $\int_a^b|f(x)|\,dx$ (a и b могут обращаться в ∞); тогда при $\lambda\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx=o(1).$$

16.34. Пусть $\alpha>0$. Доказать, что при $\lambda\to\infty$

$$\int_0^{\infty}(1+x)^{-\alpha}e^{i\lambda x}dx=i\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2}).$$

16.35. Пусть функция $f(x)$ N раз непрерывно дифференцируема на $[0,\,2\pi]$ и $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(2\pi)$ для $k=0,\,1,\,\ldots,\,N-1$. Доказать, что при $n\to\infty$

$$\int_0^{2\pi}f(x)e^{inx}dx=o(n^{-N}).$$

16.36. Пусть $\alpha>0$. Доказать, что при $x\to+\infty$ справедливо разложение

$$\int_x^{\infty}t^{-\alpha}e^{it}dt=\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

16.37. Получить асимптотическое разложение для *интеграла Френеля* при $x\to\infty$

$$\Phi(x)=\int_x^{\infty}e^{it^2}dt=e^{ix^2}\left(\frac{i}{2x}+\frac{1}{4x^3}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right).$$

16.38. *Лемма Эрдейи*: пусть $\alpha\ge 1$, $\beta>0$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $[0,\,a]$ и обращается в нуль вместе со всеми производными в точке $x=a$. Доказать, что при $\lambda\to+\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{i\lambda x^{\alpha}}dx\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-(k+\beta)/\alpha},$$

где коэффициенты a_k определяются по формулам

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{\alpha k!}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)e^{i\frac{\pi}{2}\frac{k+\beta}{\alpha}}.$$

16.39. Показать, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x^3}dx \sim \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\lambda^{-1/3}e^{i\pi/6}.$$

16.40. Найти асимптотическое разложение при $\lambda \to +\infty$ для интеграла

$$\int_0^{\pi} e^{i\lambda\cos t}\cos^2 t\,dt.$$

16.41. Пусть

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}d\varphi$$

($n \geq 0$ – целое число) есть функция Бесселя целого порядка. Доказать, что при $x \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

16.42. Доказать, что для функции Бесселя целого порядка $n \geq 0$ справедливо интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi - n\varphi)d\varphi.$$

16.43. Доказать, что для функции $J_n(nx)$ при $n \to \infty$, n – натуральное, справедливо следующее асимптотическое представление при фиксированном $x > 1$:

$$J_n(nx) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sqrt{{}^2-1}}}\cos\left(n\arccos\frac{1}{x} - n\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, для $J_n(n)$ при $n \to \infty$, n – натуральное, справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$J_n(n) = \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi}n^{-1/3} + O(n^{-2/3}).$$

16.44. Пусть α, β – положительные числа, γ – достаточно большое положительное число, $n \geq 2$ – натуральное число. Доказать, что при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление:

$$\int_0^1 x^\gamma e^{-\beta(1-x)^{-\alpha}} \cos\left(\int_0^x e^{(1-t)^{-\alpha}}\,dt\right) x^{n/2} J_{(n/2)-1}(\lambda x)\,dx \sim c_0 \frac{\cos\lambda}{\lambda^{\beta+1}(\ln\lambda)^{(\alpha+1)/(2\alpha)}}$$

где $J_{(n/2)-1}(\lambda x)$ – функция Бесселя дробного порядка $(n/2)-1$.

16.45. Пусть $H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_\gamma e^{i(x\sin z - \nu z)}dz$ – *функция Ханкеля* 1-го рода любого действительного (или комплексного) порядка ν. Здесь контур γ переходит из полуполосы $\{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ в полуполосу $\{\pi/2 < \operatorname{Re} z < 3\pi/2, \operatorname{Im} z < 0\}$ через точку $z_0 = \pi/2$. Доказать, что при $x \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/2x}\left(e^{i(x-\nu\pi/2-\pi/4)} + O(1/x)\right).$$

16.46. Доказать, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{(1+x^2)^\lambda}dx \sim \left(\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{\lambda}\right)^{1/2} e^{-\lambda(\sqrt{2}-1)}(2\sqrt{2}-2)^{-\lambda}.$$

16.47. Доказать, что при натуральном $n \to +\infty$

$$\int_{-\infty+i}^{+\infty+i} e^{-z^2}(1+z)^{-n}dz \sim (\pi/2e)^{1/2} i^{-n}(2e/n)^{n/2}.$$

16.48. Пусть функция $f(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z \le \alpha$, $\alpha > 0$, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $\operatorname{Re} z_k < \alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Re} z \le \alpha$. Доказать, что при $t \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} f(z)dz \sim \sum \operatorname{res}[e^{zt} f(z)].$$

где вычеты берутся по всем особым точкам, для которых $\operatorname{Re} z \ge 0$.

16.49. Исследовать при $t \to +\infty$ и при $n \to \infty$ асимптотическое поведение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{zt}dz}{z^2(z+a)^3},\ \alpha > 0, \operatorname{Re} a > 0.$$

16.50. Найти асимптотическое разложение при $t \to +\infty$ интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{zt}\sqrt{z}}{z^2+\omega^2}dz,\ \alpha > 0,\ \omega > 0.$$

где $\sqrt{z} > 0$, если $z > 0$.

16.51. Доказать, что для функции Бесселя $J_n(z)$ целого порядка и комплексного аргумента z справедливо интегральное представление

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} e^{\frac{z}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})}\xi^{-n-1}d\xi.$$

16.52. Исходя из интегрального представления для $J_n(z)$ из предыдущей задачи доказать, что при $z \to \infty$, $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$J_n(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi z}}\left[\cos(z - n\pi/2 - \pi/4) + O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z + O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right].$$

16.53. *Формула Пуассона*. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \in \mathbf{R}$, абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$, ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ сходится и ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n+x)$ сходится равномерно при $0 \le x \le 1$. Доказать, что справедлива следующая формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi nx} f(x)dx.$$

16.54. Найти асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

16.55. Найти асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

16.56. Доказать, что при $x \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}/n = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{\gamma}{2} + O(\sqrt{x}).$$

где γ – постоянная Эйлера.

16.57. Доказать, что при $\varepsilon \to +0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon^{2n}} = \frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}}\right).$$

Глава 17
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть X – вещественное или комплексное нормированное пространство. В этой главе мы будем рассматривать только задачу о приближении фиксированного элемента $x \in X$ фиксированным множеством $F \subset X$.

Наилучшим приближением элемента $x \in X$ множеством F называют величину

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|.$$

Зачастую множества F – подпространства (конечномерные или бесконечномерные), а также выпуклые замкнутые множества.

Если существует элемент $u_0 \in F$, реализующий указанную точную нижнюю грань, т. е. такой, что

$$\|x - u_0\| = E(x, F),$$

то u_0 называется *элементом наилучшего приближения* для x в множестве F или ближайшим к x элементом в F, или *метрической проекцией* элемента x на множество F. Функционал $E(x, F)$ называют *функционалом наилучшего приближения*, а оператор P_F, ставящий в соответствие элементу x его метрическую проекцию $u_0 \in F$, т. е. $P_F x = u_0$, называют *оператором метрического проектирования* или *оператором наилучшего приближения*.

Рассмотрим следующие задачи.

1. Существование для любого $x \in X_1 \subset X$ в множестве F наилучшего элемента. Множество F, обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ в F существует наилучший элемент, называют *множеством существования* (или E-множеством).

2. Единственность для любого $x \in X_1 \subset X$ в множестве F наилучшего элемента. Множество F, обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ наилучший для x элемент из F единственен, называют *множеством единственности* (или U-множеством).

3. Важным вопросом является изучение характеристических свойств наилучшего элемента и способ его построения.

В пространстве $C[a, b]$ функций f, непрерывных на отрезке $[a, b]$, будем рассматривать норму

$$\|f\|_C = \sup_{a \le t \le b} |f(t)|.$$

В пространстве $L_p[a, b]$ функций f, интегрируемых по Лебегу со степенью $p \ge 1$, будем рассматривать норму

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p \, dt)^{1/p}.$$

Если функции 2π-периодические, то рассматриваем соответственно нормы

$$\|f\|_C = \sup_{0 \le t \le 2\pi} |f(t)|,$$

$$\|f\|_p = (\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt)^{1/p}, \ p \ge 1.$$

Пусть X – пространство C-непрерывных или пространство L_p ($p \ge 1$) 2π-периодических вещественнозначных или комплекснозначных функций, а $\|\cdot\|$ – норма в X.

Модулем непрерывности функции $f \in X$ в пространстве X называют функцию

$$\omega(f, t) = \sup_{|u| \le t} \|f(x+u) - f(x)\|_X, \quad t \ge 0.$$

Пусть X – линейное нормированное пространство над полем P, $P = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, с нормой $\|\cdot\|$. Множество элементов $\mathfrak{F} \subset X$ называют замкнутым в X, если для любого элемента $f \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{F}$ и такие числа $a_1, \ldots, a_n \in P$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Алгебраическим полиномом одной переменной $z \in \mathbf{R}$ (или $z \in \mathbf{C}$) с действительными (или комплексными) коэффициентами a_0, $a_1, \ldots, a_n$ степени n, $a_n \ne 0$, называют функцию

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0.$$

Тригонометрическим полиномом называют функцию вида

$$t_n(z) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots +$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Рациональной дробью называют функцию, равную отношению двух алгебраических полиномов

$$R(z) = P_n(z)\ Q_m^{-1}(z),$$

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0,\ a_n \neq 0,$$

$$Q_m(z) = b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots a_1 z + a_0,\ b_m \neq 0.$$

Теоремы Вейерштрасса о приближении функций полиномами состоят в том, что алгебраические (тригонометрические) полиномы образуют замкнутые множества в пространствах **C** и L_p, $p \geq 1$.

Критерий замкнутости множества в линейном нормированном пространстве $\mathfrak{F}$ дает следующая теорема.

Теорема. Множество $\mathfrak{F}$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда всякий линейный непрерывный функционал $\varphi \in X^*$ (X^* – сопряженное пространство к X), обращающийся в нуль на любом векторе $y \in \mathfrak{F}$, $\varphi(y) = 0$, тождественно равен нулю.

Пространство X^* состоит из линейных непрерывных функционалов φ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = s(x)\frac{b_{n-\nu}x^{n-\nu} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_{m-\mu}x^{m-\mu} + \ldots + a_1 x + a_0} \equiv s(x)\frac{B(x)}{A(x)},$$

$0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$, $a_0 \neq 0$, многочлены $A(x)$ и $B(x)$ не имеют общих делителей, кроме многочленов нулевой степени. Пусть P – множество функций $p(x)$, для которых $s(x)$, m, n фиксированы, μ, ν, $a_0, a_1, \ldots, a_m$, а также $b_0, b_1, \ldots, b_n$ – произвольные.

Пусть

$$E(f, P) = \inf_{p(x) \in P} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$$

По *теореме Чебышева* множество P задается множеством существования и единственности и $p^*(x) \in P$ является наилучшим равномерным приближением для функции $f(x) \in C[a, b]$ тогда и только тогда, когда число точек N из отрезка $[a, b]$, в которых разность $f(x) - p^*(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $\sup\limits_{a \le x \le b} |f(x) - p^*(x)|$ не меньше, чем $m + n - \min(\mu, \nu) + 2$ раз; если же $p(x) \equiv 0$, то $N \ge n + 2$ и

$$E(f, P) = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|.$$

Если $s(x) \equiv 1$, $m = 0$, то получаем *теорему Чебышева о наилучшем равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими полиномами*. Именно, $p^*(x)$ является наилучшим равномерным приближением функции $f(x) \in C[a, b]$ среди алгебраических многочленов, степень которых не превосходит $n \in \mathbf{N}$, тогда и только тогда, когда разность $f(x) - p^*(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$ не меньше, чем в $n + 2$ точках.

Теорема Чебышева о равномерном приближении 2π–периодических функций тригонометрическими полиномами вида

$$t_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ a_n^2 + b_n^2 \ne 0$$

формулируется так: тригонометрический полином $t_n^*(x)$ является наилучшим равномерным приближением 2π–периодической функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда разность $f(x) - t_n(x)$ принимает с чередующимися знаками значение

$$\sup_{0 \le x \le 2\pi} |f(x) - t_n^*(x)|$$

не менее чем в $2n + 2$ точках полуинтервала $[0, 2\pi]$.

К кругу идей Чебышева принадлежит и приводимая ниже теорема Хаара. Пусть A – ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{R}^N$, $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ – линейно-независимые, непрерывные на A вещественные функции. Если A состоит из конечного числа точек, то их больше n. *Полиномом по системе функций* $\{f_k(P)\}_1^n$ назовем функцию

$$F(P, A) = a_1 f_1(P) + a_2 f_2(P) + \ldots + a_n f_n(P).$$

Уклонением функции $f(P) \in C(A)$ от полинома $F(P, A)$ назовем величину

$$\max_{P \in A} |f(P) - F(P, A)|.$$

Справедлива *теорема Хаара*: единственность полинома, наименее уклоняющегося от каждой функции $f(P)$, непрерывной на A, будет тогда и только тогда, когда каждый полином $F(P, x) \not\equiv 0$ имеет в A не более $n - 1$различных нулей.

Это условие, которое называется *условием Хаара*, эквивалентно условию

$$\begin{vmatrix} f_1(P_1) & f_2(P_1) \ldots f_n(P_1) \\ f_1(P_2) & f_2(P_2) \ldots f_n(P_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ f_1(P_n) & f_2(P_n) \ldots f_n(P_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

при любых различных $P_1, \ldots, P_n \in A$.

Систему вещественных непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, удовлетворяющих условию Хаара на $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b), $[a, b)$ называют *системой Чебышева* на соответствующем множестве.

Пусть теперь F – подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $f(z)$ – функция комплексного переменного $z \in E$, непрерывная на E. Для того, чтобы непрерывная на E функция равномерно приближалась на E алгебраическими полиномами, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) множество E не имеет внутренних точек;
2) дополнение к E связно.

Это утверждение называется *теоремой М. А. Лаврентьева*.

Снимая условие 1), т. е. переходя к изучения множеств E, имеющих внутренние точки, необходимо ограничить класс приближаемых функций, например, теми, которые аналитичны на $\operatorname{int} E$. Полное решение этой задачи получено С. Н. Мергеляном, который доказал, что для того, чтобы любая функция, непрерывная на компактном множестве E и аналитическая на $\operatorname{int} E$, равномерно приближалась алгебраическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к E было связно.

Пусть E – замкнутая односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой E. Если функция $f(z)$ аналитична на int E и непрерывна на E, то для любой точки $z \in \text{int}\, E$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Большинство способов построения многочленов $P_n(z)$, приближающих функцию $f(z)$, основано на представлении ядра этого интеграла в виде

$$(\xi - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi) P_k(z),\ \ z \in E, \xi \in \partial E,$$

где $a_k(\xi)$ – функции, интегрируемые на ∂E (зачастую мероморфные в E и непрерывные на ∂E), а $p_k(z)$ – алгебраические многочлены. Тогда, если возможно почленное интегрирование указанного ряда по границе E, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} f(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi) P_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(z).$$

Если частичные суммы этого ряда хорошо приближают функцию, то они и являются "хорошими" алгебраическими многочленами для функции $f(z)$.

Целой функцией экспоненциального типа $\sigma \geq 0$ называют целую функцию $f(z)$, которая при любом $z \in \mathbf{C}$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|},$$

где $A, B \geq 0$. Точная нижняя грань тех B, для которых имеет место это неравенство, называется *типом σ*. Множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, обозначается через E_σ.

17.1. Доказать, что любое конечномерное подпространство F линейного нормированного пространства X является множеством существования.

17.2. Привести пример множества F в линейном нормированном пространстве X, которое не является множеством существования.

17.3. *Множество* F нормированного пространства называется *локально-компактным*, если любая ограниченная последовательность элементов из F содержит сходящуюся подпоследовательность. Доказать, что любое замкнутое локально-компактное множество F линейного нормированного пространства X является множеством существования.

17.4. *Норму* $\| \, \|$ линейного пространства называют *строго выпуклой*, если равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$, возможно тогда и только тогда, когда $x = \alpha\, y$ или $y = \beta\, x$, $\alpha, \beta > 0$.

Доказать, что $\| \, \|$ строго выпукла тогда и только тогда, когда единичная сфера $S = \{x\colon \|x\| = 1\}$ в X не содержит отрезков, т. е. если $x, y \in S$, $x \neq y$, то $\| t\,x + (1-t)\,y \| < 1$ для любого t, $0 < t < 1$.

17.5. Привести примеры строго выпуклых и не строго выпуклых норм в пространствах: 1) $\mathbf{R}^n$, 2) $\mathbf{C}^n$, 3) $C[0, 1]$, 4) $L_p[0, 1]$ ($p \geq 1$), 5) $L_\infty[0, 1]$.

17.6. Доказать, что если множество F является множеством существования в линейном пространстве, норма которого $\| \, \|$ строго выпукла, то множество F является множеством единственности.

17.7. Доказать, что функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ непрерывен.

17.8. Доказать, что если F – подпространство, то функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ обладает следующими свойствами:

1) Для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$E(x_1 + x_2, F) \; E(x_1, F) + E(x_2, F).$$

Это свойство называют *полуаддитивностью*.

2) Для любого $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} = \mathbf{R}$, если X – вещественное, $\mathbf{P} = \mathbf{C}$, если X – комплексное линейное пространство) и для любого $x \in X$ справедливо

$$E(\lambda x, F) = |\lambda|\, E(x, F).$$

Если $\mathbf{P} = \mathbf{R}$, то это свойств называют *положительной однородностью*.

17.9. Привести примеры пространства X и множества F, таких, что функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ не является полуаддитивным, положительно однородным.

17.10. Привести пример линейного пространства X и подпространства $F \subset X$, таких, что функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ не является аддитивным.

17.11. Доказать, что если F – конечномерное подпространство в линейном нормированном пространстве X, то оператор метрического проектирования P_F является непрерывным.

17.12. Доказать, что если F – подпространство нормированного пространства X, то оператор метрического проектирования P_F является однородным, т. е. для любого $\lambda \in P$ (см. задачу 17.8) и для любого $x \in X$

$$P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x).$$

17.13. Пусть $F_x \subset X$ является множеством элементов, наилучших для $x \in X$ в F. Доказать, что если F – выпуклое множество, то для любого $x \in X$ множество F_x выпукло.

17.14. Пусть X^* – пространство, сопряженное к вещественному линейному нормированному пространству, элементами X^* являются линейные ограниченные функционалы f с нормой

$$\| f \| = \sup_{x \in X, \|x\| \le 1} | f(x) |.$$

Доказать, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$$E(x, L(x_1, \ldots, x_n)) = \sup_{\substack{f \in X^*, \|f\| \le 1 \\ f(x_k) = 0, \, k = 1, \ldots, n}} f(x),$$

где $L(x_1, \ldots, x_n)$ – линейная оболочка в X, порожденная векторами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать также, что указанная точная верхняя грань достигается.

17.15. Пусть X и X^* – вещественное линейное нормированное пространство и соответственно сопряженное пространство. Доказать, что для любых $f, f_1, \ldots, f_n \in X^*$

$$E(f, L(f_1, \ldots, f_n)) = \sup_{\substack{x \in X, \|x\| \le 1 \\ f_k(x) = 0, \, k = 1, \ldots, n}} f(x)$$

(см. задачу 17.14). Доказать, что указанная точная верхняя грань достигается.

17.16. Пусть X – унитарное пространство со скалярным произведением $(\cdot\ ,\cdot)$. Доказать, что норма $\|x\|$, порожденная этим скалярным произведением, т. е. $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ для любого $x \in X$, превращает пространство X в строго нормированное.

17.17. Доказать, что всякое подпространство F унитарного пространства X является множеством существования и единственности.

17.18. Доказать, что оператор метрической проекции на подпространство F унитарного пространства X является линейным оператором и для любого $x \in X$ наилучший элемент $P_F(x)$ для x в подпространстве F такой, что вектор $x - P_F(x)$ ортогонален любому вектору из F.

17.19. Доказать, что если F – замкнутое выпуклое множество в унитарном пространстве X, то множество F является множеством существования и единственности.

17.20. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – векторы унитарного пространства X. *Матрицей Грама* системы этих векторов называется матрица $G(x_1, \ldots, x_n) = (\eta_{ij})$, такая, что $\eta_{ij} = (x_i, x_j)$, $i,j = 1, 2,\ldots, n$. Доказать, что если система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима, то для любого вектора $x \in X$ справедливо

$$E(x, L(x_1,...,x_n)) = \frac{\det G(x, x_1,...,x_n)}{\det G(x_1,...,x_n)}.$$

17.21. Доказать, что если X – унитарное пространство, то:

1) система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) \neq 0;$$

2) для любой системы векторов $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$

знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависима.

Указанное неравенство является *обобщением неравенства Коши–Буняковского*;

3) для любой линейно независимой системы векторов $x_1, \ldots, x_n \in X$ и для любого m, $1 \leq m \leq n$,

$$\det G(x_1,\ldots,x_n) \le \det G(x_1,\ldots,x_m)\det G(x_{m+1},\ldots,x_n).$$

Доказать, что знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда всякий вектор x_k, $k \le m$, ортогонален всякому вектору x_l, $m < l \le n$;

4) для любой системы векторов $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\det G(x_1,\ldots,x_n) \le (x_1,x_1)(x_2,x_2)\ldots(x_n,x_n).$$

17.22. Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка $n \in \mathbf{N}$ с комплексными элементами. Доказать, что

$$|\det A|^2 \le \sum_{k=1}^n |a_{1k}|^2 \sum_{k=1}^n |a_{2k}|^2 \ldots \sum_{k=1}^n |a_{nk}|^2.$$

Доказать, что знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда для любых $i, j = 1,\ldots, n$, $i \ne j$,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\overline{a}_{jk} = 0.$$

17.23. Пусть a, b – фиксированные действительные числа, $n \in \mathbf{N}$. Среди всех тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \ldots + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_0$$

найти тот, для которого интеграл $\int_0^{2\pi} |T_n(x)|^p\,dx$, $p \ge 1$, принимает наименьшее значение.

Другими словами эту задачу можно сформулировать так. Найти наилучшее приближение функции $a\cos nx + b\sin nx$ функциями из подпространства тригонометрических полиномов вида

$$t_{n-1}(x) = a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x + \ldots + a_1\cos x + b_1\sin x + a_0$$

в метрике $L_p[0, 2\pi]$, $p \ge 1$.

17.24. Пусть $q, p_1, .., p_n$ – различные комплексные числа, $\operatorname{Re} q > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} p_k > -\frac{1}{2}$, $k = 1,\ldots, n$. Найти

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{C}} \int_0^1 |t^q - (a_1 t^{p_1} + \ldots + a_n t^{p_n})|^2\,dt.$$

Сформулировать эту задачу как задачу отыскания наилучшего приближения.

17.25. Доказать, что $\omega(f, t)_X$ – модуль непрерывности функции $f \in X$ (см. введение) обладает следующими свойствами:

1) $\omega(f, 0)_X = 0$;

2) $\omega(f, t)_X$, $t \geq 0$, не убывает;

3) модуль непрерывности есть полуаддитивная функция, т. е. для любых $t_1, t_2 \geq 0$

$$\omega(f, t_1 + t_2)_X \leq \omega(f, t_1)_X + \omega(f, t_2)_X;$$

4) $\omega(f, t)_X$, $t \geq 0$, – непрерывная функция.

17.26. Доказать, что $\omega(f, t)_X = \omega(f, \pi)_X$ для любого $t \geq \pi$.

В частности, отсюда следует, что модуль непрерывности $\omega(f, t)_X$ при $t \geq \pi$ возрастать не может.

17.27. Пусть $X = C[0, 2\pi]$. Доказать, что для любой функции $\omega(t)$, $t \geq 0$, обладающей свойствами 1)–4) (см. задачу 17.25) и такой, что $\omega(t) = \omega(\pi)$ при $t \geq \pi$, найдется функция $f \in 2\pi]$, такая, что

$$\omega(f, t)_C = \omega(t).$$

Такие функции называют *модулями непрерывности*.

17.28. Доказать, что если функция $\omega(t)$ такова, что функция $t^{-1}\omega(t)$, $t > 0$, не возрастает, то $\omega(t)$ – полуаддитивная функция.

17.29. Функцию $\omega(t)$, $t \geq 0$, называют *выпуклой вверх*, если для любых $t_1, t_2 \geq 0$ и любого $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha\omega(t_1) + (1 - \alpha)\,\omega(t_2) \leq \omega(\alpha\, t_1 + (1 - \alpha)\, t_2).$$

Доказать, что всякая непрерывная неубывающая выпуклая вверх на $[0, +\infty)$ функция $\omega(t)$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) = \omega(\pi)$, при $t \geq \pi$ является модулем непрерывности.

17.30. Доказать, что функции

1) $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $t \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$;

2) $$\omega(t) = \begin{cases} Kt^{\alpha}, & 0 \leq t \leq \delta, 0 < \alpha \leq 1, K > 0, \\ K\delta^{\alpha}, & t > \delta \end{cases}$$

являются модулями непрерывности. Если функция $f(x)$ такова, что $\omega(f, t) = Kt^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$, то говорят, что $f(x) \in \mathrm{Lip}_K\alpha$

17.31. Доказать, что если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то:

1) для любого $t > 0$ существуют невозрастающие неотрицательные производные $\omega'_-(t)$, $\omega'_+(t)$, причем $\omega'_+(t) \leq \omega'_-(t)$;

2) $\omega(t)$ – абсолютно непрерывная функция на $[0, \infty)$.

17.32. Доказать, что для любого модуля непрерывности $\omega(t)$, отличного от тождественного нуля, существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_*(t)$, такой, что для любого $t \geq 0$

$$\omega(t) \leq \omega_*(t) < 2\,\omega(t).$$

Доказать, что постоянную 2 в последнем неравенстве уменьшить нельзя. Такие модули непрерывности $\omega_*(t)$ называют *выпуклой мажорантой.*

17.33. Пусть $\omega(t) = \omega(f, t)$. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ и для любого $t > 0$

$$\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\,\omega(t).$$

17.34. Доказать, что если

$$\lim_{t \to +0} \frac{\omega(f, t)}{t} = 0,$$

то функция $f(x)$ есть постоянная величина.

17.35. Пусть

$$\omega^*(f, t) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq t} \left| f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|.$$

Если $\omega^*(t) \leq Mt$, $M > 0$, $t > 0$, то говорят, что $f \in \Lambda^*$; если же $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{\omega^*(f, t)}{t} = 0$, то говорят, что $f \in \lambda^*$.

Доказать, что если $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$, то $f(x) \in \Lambda^*$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

17.36. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна для $x \geq a$ и растет на бесконечности не быстрее, чем $|x|$. Доказать, что

$$|f(x) - f(a)| \leq (|x - a| + 1)\,\omega(f, t)$$

17.37. Пусть $f(x)$ – *функция Вейерштрасса*

$$f(x) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k x),$$

где $0 < a < 1$, b – нечетное число, большее 1.

Доказать, что:

1) $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция;

2) при $ab > 1$ $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha = \ln(1/a)/\ln b$;

3) при $ab = 1$ $\omega(f, t) \le Kt \ln(1/t)$, $0 < t \le ½$;

4) при $ab = 1$ $f(x) \in \Lambda^*$, $f(x) \notin \mathrm{Lip}\, 1$.

17.38. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, интегрируема на каждом конечном интервале. Функцию

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt,\ h > 0,$$

называют *функцией Стеклова*.

Доказать, что:

1) если $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то

$$\sup_{x\in R} |f(x) - f_h(x)| \le \omega(f, h/2),\ h > 0;$$

$$\sup_{x\in R} |f_h'(x)| \le \frac{1}{h}\omega(f, h),\ h > 0;$$

2) если $f(x) \in L_p(\mathbf{R})$, $p \ge 1$, или $f(x)$ – 2π-периодическая и $f(x) \in L_p[0, 2\pi)$, $p \ge 1$, то

$$\left(\int_R |f(x) - f_h(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \omega_p(f, h/2),\ h > 0;$$

$$\left(\int_R |f_h'(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{1}{h}\omega_p(f, h),\ h > 0;$$

и соответственно

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x) - f_h(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \omega_p(f, h/2),\ h > 0;$$

$$\left(\int_0^{2\pi} |f_h'(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{1}{h}\omega_p(f, h),\ h > 0.$$

17.39. Пусть $f_{h,h}(x)$ – функция Стеклова для функции $f_h(x)$, $h > 0$, т. е.

$$f_{h,h}(x) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f_h(x+t)\, dt.$$

Доказать, что:

1) Если $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то

$$\sup_{x\in \mathbf{R}} |f(x) - f_{h,h}(x)| \le \frac{1}{2}\omega^*(f, 2h),\ h > 0;$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f''_{h,h}(x)| \le \frac{1}{h^2}\omega^*(f,2h),\ h>0;$$

определение модуля $\omega^*(f,t)$ см. в задаче 17.35.

2) Если $f(x) \in L_p(\mathbf{R})$, $p \ge 1$, или $f(x)$ – 2π-периодическая функция и $f(x) \in L_p[0, 2\pi)$, $p \ge 1$, то

$$\left(\int_R |f(x)-f_{h,h}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{0\le t\le h}\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)+f(x+t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\left(\int_R |f''_{h,h}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{h^2}\sup_{0\le t\le h}\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)+f(x+t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Верхнюю грань в правых частях этих неравенств обозначают через $\omega_p(f, 2h)$, $h > 0$, $p \ge 1$ (ср. с задачей 17.35). Соответственно

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x)-f_{h,h}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{0\le t\le h}\left(\int_0^{2\pi} |f(x-t)+f(x+t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x)-f_{h,h}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{h^2}\sup_{0\le t\le h}\left(\int_0^{2\pi} |f(x-t)+f(x+t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

17.40. Пусть дано пространство $X = C[a, b]$. Пусть $f \in X$, $\|f\|_C = \max\limits_{a\le t\le b} |f(t)|$, множество $F = F_n$ – подпространство алгебраических полиномов, степень которых не превосходит $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что множество F является множеством существования (см. введение). Доказать *теорему Вейерштрасса*, т. е. если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический полином $p(x) \in F_n$, такой, что $\|f(x) - p(x)\|_C \le \varepsilon$.

17.41. Пусть дано пространство $X = C[0, 2\pi]$. Пусть $f \in X$, $\|f(x)\| = \max\limits_{0\le t\le 2\pi} |f(t)|$, множество $F = F_n$ – подпространство тригонометрических полиномов вида

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,.$$

Доказать, что множество F является множеством существования (см. определение в начале главы).

Доказать теорему Вейерштрасса, т. е. если $f(x)$ – непрерывная, 2π-периодическая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический полином $t(x) \in F_n$, такой, что

$$\|f(x) - t(x)\|_C \le \varepsilon.$$

17.42. Сформулировать и доказать утверждения, аналогичные тем, которые сформулированы в задачах 17.25 и 17.26, но для $X = L_p[a, b]$, $p \ge 1$, и $X = L_p[0, 2\pi]$, $p \ge 1$.

17.43. Пусть $X = C[0, 1]$ или $X = L_2[0, 1]$ соответственно с нормами

$$f \in C[0, 1],\ \|f\|_C = \sup_{0\le t\le 1}|f(t)|,$$

$$f \in L_2[0, 1],\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k > -1/2$, $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \infty$.

Найти условия на последовательность $\{p_k\}$, при которых система функций

$$\mathfrak{F} = \{x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_k}, \ldots\}$$

замкнута в $C[0, 1]$ или в $L_2[0, 1]$.

17.44. Пусть

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}\left\{(x+\sqrt{x^2-1}\,)^n + (x-\sqrt{x^2-1}\,)^n\right\}.$$

Доказать, что

1) T_n является алгебраическим полиномом степени n;

2) $T_n(x) = 2^{-(n-1)}\cos n(\arccos x)$, $|x| \le 1$;

3) $\max\limits_{-1\le x\le 1}|T_n(x)| = 2^{-(n-1)}$;

4) $T_n(x)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в норме C.

Этот алгебраический полином называется *полиномом Чебышева* степени n первого рода, наименее уклоняющимся от нуля.

17.45. Найти наилучшее равномерное приближение функции $(x-a)^{-1}$ на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени n.

17.46. Найти наилучшее равномерное приближение функции $(1-k^2x)^{-1/2}$ на отрезке $0 < k < 1$ рациональными функциями, числитель и знаменатель которых имеют степень n.

17.47. Пусть a и b – фиксированные действительные числа и $n \in \mathbf{N}$. Среди тригонометрических полиномов вида

$$t_{n-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

найти полином наилучшего равномерного приближения функции $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

17.48. Пусть $0 < a < 1$, b – нечетное число. Для функции Вейерштрасса $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cos b^m x$ найти наилучшее равномерное приближение среди тригонометрических полиномов вида

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

17.49. Пусть функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ образуют систему Чебышева на отрезке $[a, b]$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ – различные точки этого отрезка. Доказать, что существует, и с точностью до постоянного множителя единственен, нетривиальный полином

$$F(x, \lambda) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x),$$

который имеет своими нулями эти точки, и других нулей у этого полинома нет. Если точка $x_k \in (a, b)$, то при переходе значения аргумента через эту точку полином $F(x, \lambda)$ меняет знак.

17.50. Пусть функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ образуют систему Чебышева на отрезке $[a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$. Доказать, что полином

$$F(x, \alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)$$

является полиномом наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ среди всех полиномов по системе $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ тогда и только тогда, когда разность $f(x) - F(x, \alpha)$ принимает значение $\sup\limits_{a \le x \le b} |f(x) - F(x,\alpha)|$ с чередующимися знаками по крайней мере в $n+1$ последовательной точке отрезка $[a, b]$.

Это утверждение является *обобщением теоремы Чебышева* на чебышевские системы функций.

17.51. Пусть A – ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{C}^N$, функции $f_1(P), \ldots, f_n(P)$, $P \in A$, – непрерывные комплекснозначные и образуют линейно-независимую систему. Если множество A конечно, то в A больше чем n точек.

Условие A. Пусть $A_x \subset A$, такое, что для любой точки $P \in A$

$$| f(P) - F(P,x) | = \sup_{Q\in A} | f(Q) - F(Q,x) |;$$

тогда для любого полинома $F(P, y)$ справедливо неравенство

$$\inf_{P\in A_x} \operatorname{Re} \overline{F(P,y)}[F(P,x) - f(P)] \le 0 .$$

Доказать, что полином

$$F(P, x) = x_1 f_1(P) + \ldots + x_n f_n(P),\ x_k \in \mathbf{C}\ (k = 1, \ldots, n)$$

является наилучшим полиномом равномерного приближения непрерывной на A функции $f(P)$ среди всех полиномов по системе $f_2(P), \ldots, f_n(P)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие A.

Это утверждение называется *теоремой А. Н. Колмогорова*, обобщающей теорему Чебышева на комплекснозначные функции.

17.52. Пусть выполнены предположения задачи 17.51. Доказать, что для любой функции, непрерывной на A, полином наилучшего равномерного приближения этой функции на A по системе $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ единственен тогда и только тогда, когда всякий нетривиальный полином

$$F(P, x) = x_1 f_1(P) + \ldots + x_n f_n(P),\ x_k \in \mathbf{C}\ (k = 1, \ldots, n)$$

обращается в нуль не более чем в $n - 1$ точке множества A.

Это утверждение называется *теоремой А. Н. Колмогорова*, обобщающей теорему Хаара на комплекснозначные функции.

17.53. Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, такие, что для любого $k \in n$ система $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ является системой Чебышева на интервале (a, b). Доказать, что если полином

$$F(x) = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x) + f_k(P),$$

такой, что $\int_a^b f_r(x) \operatorname{sign} F(x)\, dx = 0$ $(r = 1, \ldots, k-1)$, то $F(x)$ наименее уклоняется от нуля в метрике $L_1(a, b)$ среди всех полиномов вида $\beta_1 L_1(x) + \ldots + \beta_{k-1} f_{k-1}(x) + f_k(x)$.

17.54. Пусть $T_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригонометрический полином. Доказать, что:

1) $T_n(x) = a_n \cos nx + \dfrac{\cos nx}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \operatorname{ctg} \dfrac{x - x_k}{2} T_n(x_k)$,

где x_k, $k = 1, \ldots, 2n$ – нули полинома

$$\cos nx = A \prod_{k=1}^{2n} \sin\left((x - x_k)/2\right);$$

2) $T_n'(0) = \dfrac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{x_k}{2}} T_n(x_k)$, x_k – нули $\cos nx$;

3) $T_n'(x) = \dfrac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{x_k}{2}} T_n(x + x_k)$, x_k – нули $\cos nx$

(эту формулу называют *интерполяционной формулой М. Рисса*);

4) $n = \dfrac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{x_k}{2}}$, x_k – нули $\cos nx$.

17.55. Доказать (см. обозначения в задаче 17.54), что:

1) $\sup |T_n'(x)| \le \sup\limits_{x \in [0, 2\pi)} |T_n(x)|$

2) $\left(\int_0^{2\pi} |T_n'(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_0^{2\pi} |T_n(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, $p \ge 1$.

Доказать, что эти неравенства точные. Эти неравенства называются *неравенствами Бернштейна*.

17.56. Доказать, что для любого алгебраического полинома $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, $a_n \ne 0$, выполняется неравенство $\sup\limits_{-1 \le x \le 1} |P_n'(x)| \le n^2 \sup\limits_{-1 \le x \le 1} |P_n(x)|$. Доказать, что это неравенство точное. Это неравенство называется *неравенством А. А. Маркова*.

17.57. Пусть $E_n(\varphi)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной периодической функции $\varphi(x)$ тригонометрическими полиномами вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$\omega(\varphi, t)$ – модуль непрерывности функции $\varphi(x)$. Доказать, что:

1) найдется такая константа k, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$E_n(f) \le k\omega(f, 1/n);$$

2) если $f(x) \in C^r[0, 2\pi]$, $r = 1, 2, \ldots$, то найдется такая константа K_r, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$E_n(f) \le \frac{K_r}{n^r}\omega(f^{(r)}, 1/n).$$

Эти неравенства называются *неравенствами Джексона*.

17.58. Пусть $E_n(\varphi)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции φ алгебраическими многочленами степени, не превосходящей $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что $\omega(\varphi, t)$ – модуль непрерывности функции φ. Доказать, что:

1) для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо $E_n(f) \le 2\omega(f, \frac{b-a}{n+1})$;

2) если $f(x) \in C^r[a, b]$, то существует константа K такая, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$E_n(f) \le \frac{K_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{b-a}{n+1}\right).$$

Эти неравенства также называются *неравенствами Джексона*.

17.59. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, т. е. $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$. Доказать, что $E_n(f) \le 2L\frac{b-a}{n+1}$ (см. обозначения в задаче 17.58).

17.60. Доказать, что если множество $F \subset \mathbf{C}$ не содержит бесконечно удаленной точки, то предел равномерно сходящейся на E последовательности алгебраических многочленов является функцией, непрерывной на E и аналитической на $\operatorname{int} E$.

17.61. Доказать, что если последовательность алгебраических многочленов сходится равномерно на E, то эта последовательность сходится равномерно на замыкании E к функции, непрерывной на E и аналитической на $\operatorname{int} E$.

17.62. Привести пример неограниченного множества E, такого, что $\mathbf{C} \backslash E \ne \varnothing$, и пример функции $f(z)$, аналитической на $\operatorname{int} E$, непрерывной на E, которая не является равномерным пределом последовательности алгебраических многочленов.

17.63. Привести пример замкнутого ограниченного неодносвязного множества E и функции $f(z)$, аналитической на int E, непрерывной на E, которая не является равномерным пределом последовательности алгебраических многочленов.

17.64. Доказать, что если точка z находится внутри эллипса, проходящего через точку ζ и имеющего точки ± 1 своими фокусами, то имеет место равенство

$$(\zeta - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) Q_k(\varsigma) P_k(z),$$

где $P_k(z)$ – многочлены Лежандра, а $Q_k(\zeta)$ – функции Лежандра второго рода:

$$P_k(z) = a_k \frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k;$$

$$Q_k(\varsigma) = b_k \frac{d^k}{d\varsigma^k}\Big((\varsigma^2-1)\int_{\varsigma}^{\infty}(\omega^2-1)^{-k-1}d\omega\Big).$$

17.65. Пусть E – замкнутая ограниченная односвязная область, граница которой ∂E – замкнутая кусочно-гладкая кривая, $\xi \in \partial E$, $z \in \operatorname{int} E$ и $z_0, z_1, \ldots, z_n$ – различные точки из int E. Доказать, что

$$(\xi - z)^{-1} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)(\xi - z_1)} + \ldots$$

$$+\frac{(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})}{(\xi-z_0)(\xi-z_1)\ldots(\xi-z_n)} + \frac{(z-z)\ldots(z-z)}{(\xi-z_0)\ldots(\xi-z_n)}\frac{1}{\xi-z}.$$

17.66. Пусть E – замкнутое связное множество с односвязным дополнением. Доказать, что существует единственная функция $\Phi(z)$, которая конформно и однолистно отображает внешность E на внешность единичного круга и нормирована условием

$$0 < \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z} < \infty.$$

17.67. Пусть выполнены предположения задачи 17.66. *Многочленом Фабера* порядка $n = 0, 1, \ldots$ для множества E называется многочлен $F_n(z)$, который состоит из совокупности членов с неотрицательными степенями в лорановском разложении функции

$(\Phi(z))^n$ в окрестности точки $z = \infty$. Пусть $E = \{z\colon |z-z_0| < r\}$; построить многочлен Фабера для E.

17.68. *Лемнискатой* порядка $k = 0, 1, \ldots$ радиуса $r \geq 0$ называется множество точек $\{z\colon |P_k(z)| = r,\, P_k(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_k)\}$. Пусть E – множество точек, границей которого является связная лемниската. Построить многочлены Фабера для множества E.

17.69. Построить многочлены Фабера для множества $E = [-1, 1]$.

17.70. Доказать, что во внутренних точках множества E с достаточно гладкой границей ∂E имеет место равенство

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi'(\xi)}{(\Phi(\xi))^{k+1}} F_k(z)\,,$$

где $F_k(z)$ – многочлены Фабера для E, определение функции $\Phi(\xi)$ дано в задаче 17.66.

17.71. Доказать, что тип целой функции $f(z)$ вычисляется по формуле (см. введение)

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}\,.$$

17.72. Определить тип целых функций:

1) $P(z)\,e^{\sigma z}$; 2) $\dfrac{e^{\sigma z} - 1}{z} P(z)$;

3) $P(z)\cos(\sigma z + \alpha)$; 4) $P(z)\cos(\sigma\sqrt{z^2 + \alpha})$

где $P(z)$ – алгебраический полином.

17.73. Пусть целая функция $f(z)$ такова, что

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots\,.$$

1) Доказать следующие неравенства:

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} \leq \sigma\,,$$

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{n}{e}\sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} \leq \sigma$$

эквивалентны.

2) Доказать, что тип функции $f(z) \in E$ равен σ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\,|\,c_n\,|} = \sigma.$$

17.74. Пусть $f(z) \in E_\sigma$ и $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\,f(x)\,|<\infty$. Доказать, что при любом натуральном k

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|\,f^{(k)}(x)\,|\le \sigma^k \sup_{x\in\mathbf{R}}|\,f(x)\,|.$$

Это неравенство называется *неравенством Бернштейна*.

17.75. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, бесконечно дифференцируема и

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|\,f^{(k)}(x)\,|\le M\sigma^k,\ k=0,1,2,\dots .$$

Доказать, что существует функция $F(z) \in E_\sigma$, которая совпадает с $f(x)$ при $z = x \in \mathbf{R}$.

17.76. Доказать, что если функция $\Phi(z)$ имеет период $l > 0$ и $\Phi(z) \in E_T$, то

$$\Phi(z) = \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikz/l}, \text{ где } n \le [Tl/(2\pi)].$$

17.77. Доказать, что если функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная функция с периодом $l > 0$, и если существует функция $\psi(z)$ экспоненциального типа, меньшего чем T, такая, что $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\,f(x)-\psi(x)\,|\le\sigma$, то существует тригонометрический полином

$$\Phi(x) = \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx/l},\ n \le Tl/(2\pi),$$

такой, что $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\,f(x)-\Phi(x)\,|\le\sigma$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1

1.2.

1) $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 1$;

2) при $n = 2k+1$: $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = (-1)^k$,
при $n = 2k$: $\operatorname{Re} w = (-1)^k$, $\operatorname{Im} w = 0$;

3) $\operatorname{Re} w = 2\sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}(-1)^m$, $\operatorname{Im} w = 0$;

4) при $n = 2k + 1$: $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = (-1)^{k+1}$;
при $n = 2k$: $\operatorname{Re} w = (-1)^k$, $\operatorname{Im} w = 0$;

5) $\operatorname{Re} w = 1/4$, $\operatorname{Im} w = 0$; 6) $\operatorname{Re} w = -4/3$, $\operatorname{Im} w = 0$;

7) $\operatorname{Re} w = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m C_n^{2m} x^{n-2m} y^{2m}$,

$\operatorname{Im} w = \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_n^{2m+1}(-1)^m x^{n-2m-1} y^{2m+1}$;

8) $\operatorname{Re} w = \cos(2n\alpha)$, $\operatorname{Im} w = -\sin(2n\alpha)$;

9) $\operatorname{Re} w = 2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\frac{n\varphi}{2}$, $\operatorname{Im} w = 2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n \sin\frac{n\varphi}{2}$;

10) $\operatorname{Re} w = 2^n\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n (-1)^n \cos\frac{n\varphi}{2}$,

$\operatorname{Im} w = 2^n\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n (-1)^{n+1} \sin\frac{n\varphi}{2}$.

1.4.

1) $|w| = \sqrt{2/5}$, $\arg w = \operatorname{arctg} 3$; 2) $|w| = 8$, $\arg w = \pi$;

3) $|w| = 2^{12}$, $\arg w = 0$; 4) $|w| = 1/4$, $\arg w = 0$;

5) $$\arg\omega = \begin{cases} 0, & n = 4k, \\ -\pi/2, & n = 4k+1, \\ \pi, & n = 4k+2, \\ \pi/2, & n = 4k+3, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z};$$

6) $|w| = 1$, $\arg w = 5\pi/6$; 7) $|w| = 1$, $\arg w = -\pi/4$;

8) $|w| = 2|\cos\alpha/2|$, $\arg w = \alpha/2$;

9) $|w| = 1$, $\arg w = \alpha + 2n\pi \in (-\pi, \pi]$, $n \in \mathbf{Z}$;

10) $|w| = 2\cos\varphi/2$, где $\varphi = \arg z \in [-\pi, \pi]$,

$$\arg w = \begin{cases} 3\varphi/2, & |\varphi| \le 2\pi/3; \\ -2\pi + 3\varphi/2, & 2\pi/3 < \varphi \le \pi; \\ 2\pi + 3\varphi/2, & -\pi < \varphi < -2\pi/3. \end{cases}$$

1.5.

1) $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = \pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $z = i(1 - \sqrt{2})$;

3) $z = x + iy$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$, $x \le 0$; 4) $z = 3/2 - 2i$;

5) если $n = 2$, то $z = x$, $x \in \mathbf{R}$; если $n \ne 2$, то $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi = 2k\pi/n$, $k = 0, \pm1, \ , \pm[n/2]$, при любом $n \in \mathbf{N}$, $z = 0$;

6) если $n = 1$, то $z = x$, $x \in \mathbf{R}$; если $n \ne 1$, то $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi = 2k\pi/(n+1)$, $k = 0, \pm1, \ , \pm[(n+1)/2]$, при любом $n \in \mathbf{N}$, $z = 0$.

1.11.

1) $$\frac{r^{n+2}\cos(x+n\alpha)-r^{n+1}\cos(x+(n+1)\alpha)-r\cos(x-\alpha)+\cos x}{r^2-2r\cos\alpha+1};$$

2) $$\frac{r^{n+2}\sin(x+n\alpha)-r^{n+1}\sin(x+(n+1)\alpha)-r\sin(x-\alpha)+\sin x}{r^2-2r\cos\alpha+1};$$

3) $\dfrac{\cos x-r\cos(x-\alpha)}{r^2-2r\cos\alpha+1}$; 4) $\dfrac{\sin x-r\sin(x-\alpha)}{r^2-2r\cos\alpha+1}$;

5) $$\sum_{i=1}^{n}\cos(i\alpha)=\frac{\sin((n+1/2)\alpha)-\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)},\ \alpha\ne2\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$$

6) $$\sum_{i=1}^{n}\sin(i\alpha)=\frac{\cos(\alpha/2)-\cos((n+1/2)\alpha)}{2\sin(\alpha/2)},\ \alpha\ne2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

1.13.

1) При $r_2 = 0$ – открытый шар с центром в точке z_0 без точки z_0; при $r_2 > 0$ – концентрическое кольцо с центром в точке z_0 и радиусами r_1 и r_2;

2) часть плоскости, ограниченная углом раствора $\varphi_2 - \varphi_1$ в точке $z = 0$, который образован лучами $\arg z = \varphi_2$ и $\arg z = \varphi_1$;

3) при $C = 0$ – мнимая ось с выколотой точкой $y = 0$; при $C \ne 0$ – окружность с центром в точке $(1/(2C), 0)$ и радиусом $1/(2|C|)$;

4) при $C = 0$ – действительная ось с выколотой точкой $x = 0$; при $C \ne 0$ – окружность с центром в точке $(0, -1/(2C))$ и радиусом $1/(2|C|)$;

5) семейство дуг окружностей, проходящих через точки z_1 и z_2 (включая прямолинейные отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2);

6) эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 с большой полуосью, равной a;

7) гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2 и действительной полуосью, равной a;

8) комплексная плоскость без параболы $x = -1 + y^2/4$ и части комплексной плоскости, лежащей выше этой параболы;

9) объединение открытых кругов $\{z: |z-i|<\sqrt{2}\}$, $|z+i|<\sqrt{2}\}$ без их общей части;

10) открытая область, ограниченная кривой $|z-z_1||z-z_2|=R^2$, где z_1 и z_2 – корни уравнения $z^2 + az + b = 0$. Эта кривая представляет ГМТ, произведение расстояний которых от z_1 и z_2 постоянно и равно R^2.

1.14. При $k \neq 1$ – окружность с центром в точке

$$z_0 = \frac{k^2}{|k^2-1|} z_2 - \frac{1}{|k^2-1|} z_1 \text{ и радиусом } r = \frac{k}{|k^2-1|}|z_1 - z_2|;$$

при $k = 1$ – прямая, проходящая через середину отрезка $[z_1, z_2]$ и перпендикулярная прямой, проходящей через точки z_1, z_2.

1.15.

а) 1) Внутренность единичного круга с центром в точке $z = 0$;

2) единичная окружность с центром в точке $z = 0$;

3) внешность единичного круга с центром в точке $z = 0$.

б) Не лежит.

1.16. 1) Центр окружности в точке $-b/a$, радиус равен $\sqrt{(b^2-ac)/a^2}$;

3) уравнение прямой:

$$z - e^{i\varphi}\overline{z} - e^{i\varphi}\left(\frac{\overline{z}_1 z_2 - z_1 \overline{z}_2}{z_1 - z_2}\right) = 0, \varphi = 2\arg(z_1 - z_2);$$

4) уравнение прямой: $\overline{A}z - A\overline{z} + (A\overline{z}_1 - \overline{A}z_1) = 0;$

5) площадь треугольника

$$S = \frac{|z_3 - z_1| \cdot |z_2 - z_1|}{2} \sin|\varphi|, |\varphi| = |\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)|;$$

6) радиус $R = \dfrac{1}{2} \dfrac{|z_2 - z_1||z_1 - z_3||z_3 - z_2|}{|\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)|}$,

центр $z_0 = \dfrac{i}{2} \dfrac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)}$.

1.19. При повороте сферы на 180° вокруг диаметра, параллельного действительной оси комплексной плоскости.

1.20. Семейство окружностей, касающихся друг друга в полюсе $P(0, 0, 1)$; прямой, проходящей через начало координат, соответствует большая окружность, а прямой, параллельной ей и отстоящей от начала координат на расстояние $\rho > 0$, – окружность, лежащая в плоскости, наклоненной под углом $\operatorname{arctg} \rho$ к меридианальной плоскости.

1.24.

1) Внутренность круга с центром в точке $z = 0$ и радиусом $R^2/\sqrt{1-R^2}$;

2) внешность круга с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt{1-R^2}\,/R$;

3) открытая нижняя полуплоскость плоскости **C**;

4) правая открытая полуплоскость, за исключением замкнутого круга радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке $(2, 0)$.

1.25.

1) $(\sqrt{3}+i)/2$, $(-\sqrt{3}+i)/2$, i; 2) $e^{-i(\pi/8+k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$;

3) $\pm\sqrt[4]{2}\,(\cos \pi/8 - i \sin \pi/8)$;

4) $\sqrt[5]{5}\, e^{i(\alpha/5+2n\pi/5)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$, $\alpha = \pi - \arcsin 3/5$;

5) $e^{-i\pi/3}$; 6) $\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{6}$; 7) $\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\, e^{i\varphi/4}$;

8) $\pm\sqrt{2}\,|\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)|\, e^{i\alpha}$, где $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1-\operatorname{tg}(\varphi/2)}$;

9) $\pm\sqrt{5}\, e^{i\varphi/2}$, где $\varphi = -\operatorname{arctg} 2$; 10) $2^{1/16}\, e^{i(\pi/32+in\pi/4)}$, $n = 0, 1, \ldots, 7$;

11) $e^{-i(\pi/14+2n\pi/7)}$, $n = 0, 1, \ldots, 6$.

1.37.

1) Действительными; 2) чисто мнимыми.

Глава 2

2.3. Из условия задачи следует только, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|z'_n|$.

2.5. Утверждение неверно.

2.8. При условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, или когда $z_n \geq 0$, $n \geq n_0$.

2.18. Не следует.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = (z_1 + 2z_2)/3$.

2.22. Для всех z, не являющихся чисто мнимыми числами. Предел равен 1, если $\operatorname{Re} z_1 > 0$, и равен -1, если $\operatorname{Re} z_1 < 0$. При $z_1 = C\,i$, где $C \in \mathbf{R}$, предела не существует.

2.23.

1) $|z| < 1$, $z = 1$; 2) $|z| < 1$;

3) если $k > 0$, то $|z| < 1$; если $k < 0$, то $|z| \leq 1$;

4) $|z| < \infty$; 5) $|z| \leq 1$.

2.26. $\varphi = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

2.29.

1) Если $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = \pi Q$, где Q – иррациональное число, множество предельных точек есть окружность $|z| = 1$; если $\varphi = \pi Q$, Q – рациональное число, то число предельных точек конечно. Если $|z| < 1$, то предельная точка $z_0 = 0$. Если $|z| > 1$, то предельная точка $z_0 = \infty$;

2) замкнутый круг $|z| \le 1$;

3) если const = 0, то множество предельных точек Re z = 0; если const $\ne 0$, то множество предельных точек – окружность $(x - c/2)^2 + y^2 = 1/(4c^2)$;

4) если const = 0, то множество предельных точек Im z = 0; если const $\ne 0$, то множество предельных точек – окружность $x^2 + (y + 1/(2c))^2 = 1/(4c)^2$;

5) замкнутый круг $(x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4$;

6) множество $(x - 1/2)^2 + y^2 \ge 1/4$;

7) замкнутый круг $x^2 + (y + 1/2)^2 \le 1/4$;

8) множество $x^2 + (y + 1/2)^2 \ge 1/4$;

9) множество $\alpha \le \arg z \le \beta$.

2.35. Вообще говоря, неверно.

2.42. Не следует.

2.55. Сходится при $\alpha > 0$, $\beta > 1$. Абсолютно сходится при $\min(\alpha, \beta) > 1$.

2.56. 1) $\alpha < 0$; 2) $\alpha < 0$; 3) $\alpha < 0$; 4) $\alpha > 1$.

2.57. Например, $z_n = \dfrac{e^{2n\pi Qi}}{\ln(n+1)}$, Q – иррациональное число.

2.58.

1) Сходится при $z = 0$, $z = -1$, Re $z < -1$;

2) сходится при $|z| < 1$, α – любое; при $|z| > 1$ расходится при любом $\alpha < 0$; при $|z| = 1$, если $z = e^{i\varphi}$, то при $\varphi \ne 2k\pi$ сходится при $\alpha < 0$; при $\varphi = 2k\pi$ сходится при $\alpha < -1$, $k = 0, \pm 1, \ldots$;

3) сходится при $|z| < e$; 4) сходится при $|z| \le 1/4$.

2.59. 1) $z \ne n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$; 3) $z \ne n\pi$, $n \in \mathbb{N}$; 4) $z \ne \pm n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

2.67. Не следует.

2.68. Не следует.

2.69. 1) Сходится; 2) может как сходиться, так и расходиться; 3) сходится.

2.74. 1) Сходится абсолютно; 2) сходится абсолютно; 3) абсолютно расходится; 4) абсолютно расходится; 5) абсолютно сходится; 6) абсолютно сходится.

2.75. 1) Для $|z| < 1$ сходится при любом α, при $|z| > 1$ расходится при любом α; при $z = e^{i\varphi}$ сходится при $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, если $\alpha < -1$; если $\varphi \neq 2k\pi$, то сходится при $\alpha < -1/2$; 2) сходится при $z \neq n$, $n \in \mathrm{N}$; 3) сходится при $z \neq \pm n\pi$, $n \in \mathbf{N}$; 4) сходится при $z \neq \pm in\pi$, $n \in \mathbf{N}$; 5) сходится при $|z| < 1$; 6) сходится при $|z| < 2$; 7) сходится при $z \neq \pm n$, $n \in \mathbf{N}$.

2.76. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ сходится, то бесконечное произведение при $|z| < \infty$ сходится; если же этот ряд расходится, то бесконечное произведение может сходиться только при $z = 0$.

Глава 3

3.5. Не следует.

3.6. Не следует.

3.8. Не следует.

3.16. Не следует.

3.17. Функция не обязательно будет равномерно непрерывной на множестве $z = z_1 \cup z_2$.

3.18. Функция будет равномерно непрерывной.

3.19. Да, верно.

3.21. Не следует.

3.22. Не следует.

3.26.

11) Для функции $\sin z$ – это множество точек $z = x$, $z = (2k + 1)\pi/2 + iy$, $k \in \mathbf{Z}$, для функции $\cos z$ – это множество точек $z = k\pi + iy$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

12) для функции $\sin z$ – это множество точек $z = k\pi + iy$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, для функции $\cos z$ – это множество точек $z = x$, $z = (2k + 1)\pi/2 + iy$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

3.27. 10) Для функции $\operatorname{tg} z$ – это множество точек $z = x + ik\pi/2$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$; $z = x$, $x \neq (2n+1)\pi/2$, $m \in \mathbf{Z}$; для $\operatorname{ctg} z$ – это множество точек $z = x + k\pi i/2$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$; $z = x$, $x \neq \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$;

11) $z = n\pi/2 + iy$, $n \in \mathbf{Z}$, $y \neq 0$.

3.28.

12 а) Для функции $\operatorname{sh} z$ – это множество точек $z = x + ik\pi$, для функции $\operatorname{ch} z$ – это множество точек $z = iy$, $z = x + ik\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

12 б) для функции sh z (ch z) – это множество точек $z = iy$, $z = x + i(2k+1)\pi/2$ $(z = x + i(2k+1)\pi/2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3.33. 4) Равномерно непрерывна в п. п. 4), 5), 7) и 9).

3.34. 1) При любых α; 2) $\alpha < \pi/2$.

3.35. 1) При любых α; 2) $\alpha < \pi/4$.

3.36. 3) Равномерно непрерывна; 5) равномерно непрерывна; 6) равномерно непрерывна; 7) равномерно непрерывна; 8) равномерно непрерывна.

3.44. Утверждение неверно.

Глава 4

4.7. 1) Сходится равномерно при $|z| \le r < 1$ и при $|z| \ge R > 1$;

2) сходится равномерно при $|z| \le r < 1$ и при $|z| \ge R > 1$;

3) сходится равномерно на действительной оси **R**.

4.8. 1) Если Re z >0, то $\{f_n(z)\}$ сходится при любом α; если Re z ≥ 0, то сходится при $\alpha \le 0$; если Re z < 0, то $\{f_n(z)\}$ расходится при любом α; 2) сходится равномерно на области Re z $\ge \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при любом α; сходится равномерно на области Re z ≥ 0 при $\alpha < 0$.

4.11. 1) Im z = 0; 2) Im z = 0, $x \ne 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 3) Re z = 0;
4) Re z = 0, $y \ne 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 5) $|z| < 1$; 6) $|z| > 1$;
7) $z = -1, -2, \ldots$; 8) всюду сходится; 9) сходится при $|z| = 1$, $z \ne 1$;
10) Re z > 0; 11) Re z > 0; 12) Re z < –1.

4.20. 1) Абсолютно сходится при $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
2) абсолютно расходится везде;
3) если $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то абсолютно сходится при любом p; если $z \ne k\pi$, то абсолютно сходится при $p > 1$;

4) абсолютно сходится при $p > 1$ для любого z, при $p \le 1$ абсолютно расходится везде;

5) абсолютно расходится везде;
6) абсолютно сходится при $z = ik\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
7) $|z| < 1$; 8) $|z| > 1$; 9) $|z| = 1$; 10) Re z < –1;

11) при $z = i\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, сходится абсолютно при любом $p \in \mathbf{R}$; при $z = iy$, $y \ne \pi k$, сходится абсолютно при $p > 1$;

12) если $z = iy$, то абсолютно сходится при $p > 1$; в любом другом случае абсолютно расходится; 13) Re z < 0.

4.21.

1) Сходится равномерно на отрезках действительной прямой вида $2\pi(n-1) + \varepsilon \le x \le 2n\pi - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) сходится равномерно на отрезках действительной прямой вида $2\pi(n-1)+\varepsilon \le x \le 2n\pi - \varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

3) сходится равномерно на действительной оси;

4) $\mathrm{Re}\, z \ge \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; 5) $|z| = 1$;

6) ряд сходится равномерно на всей комплексной плоскости **C**, из которой удалены круги с центрами в точках $z = -1, -2, \ldots$, радиуса $\varepsilon > 0$;

7) $|z| \ge R > 1$; 8) $|z| \le r < 1$; 9) $|z| \le 1/2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/2$;

10) $\mathrm{Re}\, z \ge \varepsilon$, $\varepsilon > 0$;

11) сходится равномерно на отрезках мнимой оси

$$2\pi(n-1)+\varepsilon \le y \le 2n\pi - \varepsilon,\ 0<\varepsilon<\pi,\ 0<p<1,$$

при $p > 1$ сходится на всей мнимой оси $\mathrm{Re}\, z = 0$;

12) при $0 < p \le 1$ сходится равномерно на отрезках мнимой оси

$$2\pi(n-1)+\varepsilon \le y \le 2n\pi - \varepsilon,\ 0<\varepsilon<\pi,$$

при $p > 1$ сходится равномерно на всей мнимой оси $\mathrm{Re}\, z = 0$.

4.22. Не следует.

4.23. Не следует.

4.27. Функция $f(z)$ определена на множестве $|z+1| > 1$ и является на нем непрерывной.

4.29. Функция $f(z)$ определена на всей комплексной плоскости **C**, кроме точек $z = \pm in$, $n \in \mathbf{N}$, и на области существования непрерывна.

4.30. Ряд сходится при $z = 0$ и $\mathrm{Re}\, z > 0$; на области сходимости сумма ряда равна 0.

4.31. Область определения θ-функции $\mathrm{Re}\, z > 0$.

4.32. Область существования суммы ряда $|\mathrm{Im}\, z| < \ln 2$.

4.37. Утверждение неверно.

4.38. 1) Да, следует; 2) нет, не следует.

4.41. При $z \ne 0$ бесконечное произведение может как сходиться, так и расходиться.

4.44. 1) $|z| < 1$; 2) $z \in \mathbf{C}$, $z \ne \pm n$, $n \in \mathbf{N}$; 3) $z \in \mathbf{C}$, $z \ne -n$, $n \in \mathbf{N}$;

4) $z \in \mathbf{C}$, $z \ne (2k+1)n\pi/2$, $n \in \mathbf{N}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

5) $z \in \mathbf{C}$, $z = k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $|z| < 1$.

4.53. Не следует.

4.54. Не следует.

Глава 5

5.1. 1) Нет; 2) нет; 4) $(0, 0)$; 6) $\{\mathrm{Re}\, z = 0\} \cup (\mathrm{Im}\, z = 0\}$;

7) геометрическое множество точек $z = x + iy$, таких, что $x = y$;

8) нет; 9) **C**; 10) $z = x + i/2,\ x \in \mathbf{R}$; 11) $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$; 12) 0; 13) 0;

14) $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{-d/c\}$.

5.2. 1) nz^{n-1}; 2) $(P'Q - Q'P)/Q^2$; 3) e^z; 4) ie^{iz}; 5) $\cos z$; 6) $-\sin z$; 7) $\operatorname{sh} z$; 8) $\operatorname{ch} z$; 9) $\cos^{-2} z$; 10) $-\sin^{-2} z$; 11) $\operatorname{ch}^{-2} z$; 12) $-\operatorname{sh}^{-2} z$; 13) $e^z \cos e^z$; 14) $e^{-z}(nz^{n-1} - z^n)$; 15) $(1-1/z^2)/2$.

5.7. Нет.

5.22.

$$1)\ \frac{1}{2}\frac{|z|}{z};\quad 2)\ \frac{p}{2}\frac{|z|^p}{z};\quad 3)\ \frac{p}{2}e^{p|z|}\frac{|z|}{z};\quad 4)\ \frac{2\bar{z}-\bar{a}-\bar{b}}{2\sqrt{|z-a|^2+|z-b|^2}};$$

$$5)\ \frac{1}{2z};\quad 6)\ \frac{1}{2}\frac{|z-a|}{|z-b|}\frac{a-b}{(z-a)(z-b)};\quad 7)\ \frac{1}{2}\frac{|z|}{z}\frac{1}{1+|z|^2}.$$

5.25.

1) $\arccos z = \dfrac{1}{i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$;

2) $\arcsin z = \dfrac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} z = \dfrac{1}{2i}\ln(1-z)/(i+z)$.

5.26. Условия Коши–Римана выполнены.

5.27. 1) 0; 2) $\pi/2 + k\pi,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$; 3) нет; 4) 0; 5) ±1.

5.28. 1) $z \in \mathbf{C}$: $z = x,\ x \in (0, +\infty)\}$;

$$2)\ \left\{z : z = x,\ x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\};$$

$$3)\ \left\{z:\ \operatorname{Re}\frac{ad-bc}{(cz+d)^2} > 0,\ \operatorname{Im}\frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = 0\right\};$$

4) лучи, выходящие из точки 0 под углом $2k\pi/(n-1),\ k = 0, 1, \ldots, n-2$;

5) $\{z:\ z = iy,\ y \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\}$.

Глава 6

6.5. 1) i; 2) $2i$.

6.6. $-8i/3$.

6.11. $2\pi\rho/\left(|\rho^2 - |a|^2|\right)$.

6.12. 1) $\dfrac{\rho^{n+1}}{n+1}\left[(-1)^{n+1}-1\right],\ n \in \mathbf{N}$; 2) 0; 3) 0.

6.33.

1) Равномерная сходимость на множестве $0<\beta<\operatorname{Re} z\le\alpha<\infty$;

2) равномерная сходимость на множестве $0<\varepsilon\le\operatorname{Re} z\le 2-\varepsilon$;

3) равномерная сходимость на множестве $0<\varepsilon\le\operatorname{Re} z\le 1-\varepsilon$;

4) равномерная сходимость на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ действительной оси, $0\in[\alpha,\beta]$;

5) равномерная сходимость на множестве $\{\operatorname{Im} z\ge 0,\ 0<r\le|z|\le R\}$.

6.36.

1) Вся плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси;

2) вся плоскость с разрезом по действительной оси $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$;

3) вся плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси;

4) вся плоскость с разрезом по лучу $\arg z=\pi+\alpha$;

5) вся плоскость с разрезом по верхней половине окружности $|z|=1$.

6.37.

1) $\operatorname{Re} z>0$; 2) $\operatorname{Re} z>0$; 3) $\operatorname{Re}(z-a)>0$; 4) $\operatorname{Re} z>0$; 5) $\operatorname{Re} z>0$;

6) $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re}|\omega|$; 7) $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re}|\omega|$; 8) $\operatorname{Re}(z-a)>0$; 9) $\operatorname{Re}(z-a)>0$.

6.38. 1) $-\dfrac{\cos az}{a}$; 2) $\dfrac{\sin az}{a}$; 3) $\dfrac{e^{az}}{a}$; 4) $\dfrac{\operatorname{sh} az}{a}$; 5) $\dfrac{\operatorname{ch} az}{a}$;

6) $\dfrac{e^{az}}{a^2+b^2}(a\sin bz-b\cos bz)$; 7) $\dfrac{e^{az}}{a^2+b^2}(b\sin bz+a\cos bz)$;

8) $\dfrac{e^{az}}{a^2-b^2}(a\operatorname{ch} bz-b\operatorname{sh} bz)$; 9) $\dfrac{e^{az}}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} bz-b\operatorname{ch} bz)$.

6.49. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$;

6.50. $\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

6.51. $\pi/2$.

6.52.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2n+1}}{x}\,dx=\frac{(-1)^n\pi}{2^{2n+1}}\times$$

$$\times\left[1-(2n+1)+\frac{(2n+1)2n}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{(-1)^n(2n+1)2n\ldots(n+2}{n!}\right].$$

6.53. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}\alpha x - \sin^{2n}\beta x}{x}dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.$

6.54. При $n = 1$: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$; при $n \geq 2$:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n (n-1)!}\sum_{k<n/2}(-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}.$$

6.58. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n}\alpha x - \cos^{2n}\beta x}{x}dx = \left[1 - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right].$

6.59. $\ln(\beta/\alpha)$.

6.64. $\frac{1}{4}\cdot\frac{e^a+1}{e^a-1} - \frac{1}{2a}$.

6.65. $\pi(e^a - 1)/2$.

Глава 7

7.4. 1) $\pi/3$; 2) $-\pi/3$; 3) 0.

7.5. Если кривая γ содержит внутри себя точу 0 и не содержит 1 и -1, то интеграл равен $-2\pi i$; если γ содержит только одну из точек -1 или 1 и не содержит точку 0, то интеграл равен πi. Значит, интеграл может принимать такие значения: $-2\pi i$, $-\pi i$, 0, πi, $2\pi i$.

7.6. 1) $\pi(e - e^{-1})$; 2) 0; 3) $\pi i(e - e^{-1})$; 4) 0; 5) $-\pi i/4$;
6) $(-1)^{n-1}2\pi i(a-b)^{-n}$; 7) $-\pi i\cos i$; 8) $\pi i/2$; 9) $2\pi i e^a(1 + a/2)$.

7.7. 1) 0; 2) $a^{-1}\sin a$.

7.8. $\pi i(1+i)/(2\sqrt{2})$.

7.11. Если $n = 1$, то не более 2; если $n > 1$, то не более $2^n - 1$.

7.14. 1) 2/3; 2) $1 - 2i/3$.

7.17. Если $a \neq b$, то интеграл равен $2\pi i(f(a) - f(b))/(a-b)$.

7.24. $\pi(R^2 - r^2)f(0)$.

7.50. $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-1}{z+1}$; $F^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1-z}{1+z} \pm \frac{1}{2}$;

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1-z}{1+z},\ z \in (-1,1).$$

7.53. 1) $-x^2 + x - 7/2$; 2) $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{z}{z-1}\right)^2$; 3) $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{z}{1-z}\right)^2 - \frac{\pi^2}{2}$.

7.54. Если $|z| > 1$ и $z \notin \gamma$, то интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{z-1}\,\mathrm{Ln}\,\frac{R+z}{R-z}+F(z),$$

где $F(z)$ – аналитическая функция при $|z| > 1$,

$$\mathrm{Ln}\,\frac{R+z}{R-z}=\ln\left|\frac{R+z}{R-z}\right|+i\Delta_\gamma\{\arg(\varsigma-z)-\arg\varsigma\}$$

однозначная ветвь в z-плоскости с разрезом вдоль γ, определяемая значением $\mathrm{Ln}\,1 = 0$.

Глава 8

8.2. 1) $R = 1$; 2) $R = \infty$; 3) $R = e$; 4) $R = 1$; 5) $R = 0$; 6) $R = 1$; 7) $R = 1$; 8) $R = 1$; 9) $R = 1$, если $|\alpha| \le 1$, $R = |\alpha|^{-1}$, если $|\alpha| > 1$; 10) $R = e^{-1}$; 11) $R = e^{-1}$, если $|\alpha| \le 1$; $R = 0$, если $|\alpha| > 1$.

8.3.

1) $R = 1$, при $a \ge 0$ ряд расходится на границе круга сходимости, при $a < 0$ сходится при всех $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \ne 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

2) $R = 1$, ряд расходится при всех $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

3) $R = 1/4$, ряд расходится на границе круга сходимости;

4) $R = \infty$; 5) $R = \infty$; 6) $R = 1$, ряд сходится на $|z| = 1$.

8.6. 1) $R \ge \min(r_a, r_b)$; 2) $R \ge r_a r_b$; 3) $R \le r_a / r_b$.

8.7. 1) $\dfrac{z}{(1-z)^2}, |z|<1$; 2) $-\ln(1-z)$, $|z| < 1$;

3) $\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1+z}{1-z}, |z|<1$; 4) $\ln(1+z)$, $|z| < 1$.

8.14. 1) $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}, R=1$;

2) $\dfrac{1}{(1+z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}(n+2)(n+1)z^n$, $R=1$;

3) $\dfrac{1}{a^2+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}}z^{2n}$, $R=|a|$;

4) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}$, $R=1$;

5) $\dfrac{1}{1-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$, $R=1$;

6) $\dfrac{1}{(1+z^3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}$, $R=1$;

7) $\dfrac{1}{(1-z^2)(4+z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)z^{2n}, R=1.$

8.15. 1) $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}, |z|>1;$

2) $\dfrac{1}{(1+z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}\dfrac{(n+1)(n+2)}{z^{n+3}}, |z|>1;$

3) $\dfrac{1}{a^2+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a^{2n}}{z^{2(n+1)}}, |z|>|a|;$

4) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{z^{2(n+2)}}, |z|>1;$

5) $\dfrac{1}{1-z^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^{2n}}, |z|>1;$

6) $\dfrac{1}{(1+z^3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{z^{3(n+2)}}, |z|>1;$

7) $\dfrac{1}{(1-z^2)(4+z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{(-1)^n4^n}{5}\right)\dfrac{1}{z^{2(n+1)}}, |z|>2.$

8.16. 1) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}, R=\infty;$

2) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R=\infty;$

3) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, R=\infty;$

4) $\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R=\infty;$

5) $\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, R=\infty;$

6) $\sin^2 z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}, R=\infty;$

7) $\cos^2 z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}, R=\infty;$

8) $e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos \frac{n\pi}{4} z^n$, $R = \infty$;

9) $e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{n\pi}{4} z^n$, $R = \infty$;

10) $\int_0^z e^{\varsigma^2} d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, $R = \infty$;

11) $\int_0^z \frac{\sin \varsigma}{\varsigma} d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $R = \infty$;

12) $\int_0^z \frac{d\varsigma}{1+\varsigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$, $R = 1$;

13) $\int_0^z \frac{d\varsigma}{1+\varsigma^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$, $R = 1$.

8.17.

1) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(1-z_0)^{n+2}} (z-z_0)^n$, $|z-z_0| < |1-z_0|$;

2) $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(z_0-1)^{n+1}} - \frac{1}{(z_0+1)^{n+1}} \right) (z-z_0)^n$,

$|z-z_0| < \min(|z_0+i|, |z_0-i|)$;

3) $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(z_0-i)^{n+1}} - \frac{1}{(z_0+i)^{n+1}} \right) (z-z_0)^n$,

$|z-z_0| < \min(|z_0+i|, |z_0-i|)$.

8.18.

1) $R = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $|z-i| < \sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $R = \infty$, $|z| < \infty$;
3) $R = \sqrt{2}$, $|z-i| < \sqrt{2}$; 4) $R = \min\{|a-i|, |b-i|\}$, $|z-i| < R$.

8.26. 1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, $|z| < \infty$;

2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} z$, $|z| < 1$;

3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \arcsin z$, $|z| < 1$;

4) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$, $|z| < \infty$;

8.46. 1) Нуль порядка $n + m$;

2) нуль порядка $k \geq \min(n, m)$;

3) нуль порядка $n - m$, если $n > m$; полюс порядка $m - n$, если $m > n$.

8.47. 1) Порядок нуля равен 2;

2) порядок нуля равен 4;

3) порядок нуля равен 3;

4) порядок нуля равен 15.

8.48.

1) Нули $z_n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

2) нули $z_n = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

3) нули $z_n = \pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

4) нули $z_n = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

5) нули $z_n = 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

6) нули $z_n = \pi/2 + 2n\pi + i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

7) нули $z_n = \pi/4 + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

8) нули $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$, нули первого порядка;

9) нули $z_n = 1 / (\pi n)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка;

10) нули $z_n = 2/ (\pi (2n+1))$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ – нули первого порядка;

11) $z_{n.k} = 1/\left(k\pi + (-1)^k \arcsin(1/n\pi)\right)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ – нули первого порядка;

12) $z_{n.k} = 1/\left(2k\pi \pm \arcsin\dfrac{2}{\pi(2\pi+1)}\right)$, $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – нули первого порядка.

8.50. 1) Не существует; 2) не существует; 3) не существует;

4) $f(z) = 1/(z + 1)$; 5) не существует; 6) $f(z) = z/(z + 2)$;

7) $f(z) = z^2$; 8) не существует.

8.54. 1) Сумма ряда аналитична на **C**-плоскости, за исключением точек $z = \pm in$, $n \in \mathbf{N}$;

2) ряд сходится на **C**-плоскости, но сумма ряда не является аналитической функцией.

8.56. Функция $\theta(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z = 0$.

8.57. Область аналитичности – горизонтальная полоса $|y| < \ln 2$.

Глава 9

9.16.

1) $½ < |z| < 2$; 2) $1 < |z| < 3$; 3) $0 < |z + 1| < +\infty$; 4) $e^{-a} < |z - 1| < e^{a}$;

5) $|z| = 1$; 6) ряд расходится в каждой точке $z \in \mathbf{C}$; 7) $|z| = 1$;

8) $1/9 \le |z| \le e$; 9) $0 < |z - z_0| < \infty$; 10) $|z| > a$; 11) $|z| > 2/\sqrt{5}$;

12) $0 < |z| < \infty$; 13) $|z| > 0$; 14) $0 < |z + 1| < 3$; 15) $1/4 < |z - 1| < 2$.

9.17.

1) Допускает; 2) допускает; 3) не допускает; 4) не допускает;

5) не допускает; 6) не допускает; 7) не допускает.

9.20. Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, то $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$, где

$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$, , $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $r < \rho < R$, r, R – радиусы кольца сходимости ряда Лорана, $r < |z - z_0| < R$.

9.23.

1) $\dfrac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{z^n}{a^{n+1}}, |z|<a, \quad \dfrac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{z^{n+1}}, |z|>a;$

2) $\dfrac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n z^{n-1}}{a^{n+1}}, |z|<|a|, \quad \dfrac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\dfrac{a^n}{z^{n+2}}, |z|>|a|;$

3) $\dfrac{1}{z^2-a^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{z^{2n}}{a^{2(n+1)}}, |z|<|a|, \quad \dfrac{1}{z^2-a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n}}{z^{2(n+1)}}, |z|>|a|;$

4) $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{b^n}\left(\dfrac{(n+1)a^2}{b^2} - \dfrac{2an}{b} + (n-1)\right), |z| < |b|,$

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = 1 + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+2}} (a^2(n+1) - 2a(n+2)b + (n+3)b^2), \quad |z| > |b|.$$

9.24. $\dfrac{1}{(1-z)(2+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\right], \ |z|<1,$

$$\frac{1}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^n}{(-2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\right), \ 1<|z|<2,$$

$$\frac{1}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}[(-1)^n 2^n - 1], \ |z|>2.$$

9.25. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3n+5}{9\cdot 2^{n+2}} (z-1)^n + \dfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}};$

2) $\dfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(z-1)^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{27\cdot 2^{2n+3}} (z-1)^n;$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-n)(-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$; 4) $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{8}{9}+\frac{19}{27}(z+1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$;

5) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-4)^n}{z^{2n+2}}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n-3}}\frac{1}{n!}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-3}}$;

8) $(z-2)^3+6(z-2)^2+23(z-2)/2+5+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(48n^2+72n+23)}{(2n+2)!(z-2)^{2n}}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+2)!}\frac{16n^2+24n+5}{(z-2)^{2n}!};$$

9) $\frac{1}{z}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\right)z^n$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1/2}}{(-2)^{n+1}}(z-1)^n+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{n+1}(n+k)!}+$

$$+(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(-1)^m}{m!}\Big)\frac{1}{(z-1)^k}.$$

9.26. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{\cos 1}{z^{2n}}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{\sin 1}{z^{2n+1}}\right)$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n-1}}\frac{1}{(2n)!}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2(n-2)}}\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, $c_n=c_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}$.

9.27.

1) z = 0 – полюс первого порядка, z = ±1 – полюс первого порядка, z = ∞ – устранимая особая точка;

2) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

есть полюсы первого порядка, z = ∞ – устранимая особая точка;

3) z = i – полюс первого порядка, z = ∞ – существенно особая точка;

4) z = ∞ – существенно особая точка;

5) $z_k = 2\pi ki$, k = ±1, ±2, … – полюсы первого порядка, z = 0 – устранимая особая точка, z = ∞ – точка накопления полюсов;

6) $z = 1$ – существенно особая точка, $z = \infty$ – устранимая особая точка;

7) $z_k = 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюсы первого порядка, $z = \infty$ – точка накопления полюсов;

8) $z_n = 2\pi n$, $a \neq \pi/2 + m\pi$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2$, $z_k = \pi - a - 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюсы первого порядка, $z = \infty$ – точка накопления полюсов; $a = \pi/2 + m\pi$ – полюс второго порядка.

9) $z_n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ – существенно особые точки, $z = \infty$ – не изолированная особая точка.

9.30. Для функции $f(z)$ интеграл должен быть равен нулю.

Если функция $f(z)$ имеет точку $z = \infty$ существенно особой точкой, то функция $F(z)$ имеет точку $z = \infty$ также существенно особой точкой. Если $z = \infty$ – полюс порядка k для функции $f(z)$, то $z = \infty$ – полюс порядка $k + 1$ для функции $F(z)$. Если $z = \infty$ – устранимая особая точка для функции $f(z)$, то $z = \infty$ – устранимая особая точка или полюс первого порядка для функции $F(z)$.

9.31. 1) $az + b$, $a \neq 0$, или $(az + b)/(cz + d)$, $ad - bc \neq 0$;

2) $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$, $a_k \neq 0$, или

$$R(z) = \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \ldots + a_0, \ a_{-k} \neq 0;$$

3) $$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n+m} z^{n+m}}{z^n}, \ a_0, a_{n+m} \neq 0;$$

4) $$R(z) = \frac{a_1}{z-\alpha_1} + \frac{a_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_n}{z-\alpha_n} + a_0, \ a_1, \ldots, a_n \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j,$$

или

$$R(z) = az + b + \frac{a_1}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z-\alpha_{n-1}}, \ a, a_1, \ldots, a_{n-1} \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j.$$

9.32. 1) Устранимая особая точка;

2) полюс порядка kn, если точка z_0 есть нуль порядка n для функции $\varphi(z)$; при $n = 0$ – полюс порядка k;

3) существенно особая точка.

9.42. Для $a = \infty$ утверждение неверно. Например, $g(z) = e^z$, $f(z) \equiv -1$.

9.44. Утверждение неверное.

Глава 10

10.3.

1) $\rho = 0$; 2) $\rho = 1$; 3) $\rho = 1$; 4) $\rho = 1$; 5) $\rho = 1$; 6) $\rho = 1$;
7) $\rho = p$; 8) $\rho = \infty$; 9) $\rho = \infty$; 10) $\rho = 1$; 11) $\rho = 1$; 12) $\rho = \infty$.

10.4. 2) $\sigma = 1$; 3) $\sigma = 1$; 4) $\sigma = |a_0|$; 5) $\sigma = 1$;

6) $\sigma = 1$; 7) $\sigma = 1$; 10) $\sigma = \sqrt{2}$; 11) $\sigma = \sqrt{2}$.

10.5. Если $a_i = 0, -1, -2, \ldots$, то $\rho = 0$; в противном случае $\rho = 1/(1+q-p)$.

10.6. 8) $\rho = k/(k-1)$.

10.12. 1) $\rho = \alpha^{-1}$, $\sigma = A$; 2) $\rho = 1$, $\sigma = e^{-1}$; 3) $\rho = \alpha$, $\sigma = \infty$; 4) $\rho = 0$;

5) $\rho = \alpha$, $\sigma = 0$; 6) $\rho = 0$; 7) $\rho = 1$, $\sigma = 1$.

10.15. Функция $f_1(z) \cdot f_2(z)$ имеет тот же порядок, что и функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, тип не больше $\sigma_1 + \sigma_2$; порядок функции $f_1(z) + f_2(z)$ равен порядку функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, тип равен σ_2.

10.16. Порядок функции $f_1(z) \cdot f_2(z)$ меньше или равен порядку функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, тип не больше 2σ. Порядок функции $f_1(z) + f_2(z)$ не больше порядка функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, тип не больше σ.

10.17. Порядок функции $F(z)$ равен $\rho_F = \rho/p$.

10.21. 1) $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$;

2) $\cos z = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \left(\dfrac{2z}{(2n+1)\pi}\right)^2\right)$;

3) $\operatorname{sh} z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$;

4) $\operatorname{ch} z = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + \left(\dfrac{2z}{(2n+1)\pi}\right)^2\right]$;

5) $e^{az} - e^{bz} = (a-b)ze^{\frac{(a+b)z}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^4}\right)$;

6) $\operatorname{ch} z - \cos z = z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{z^4}{4n^4\pi^2}\right)$.

10.22. $z_{n,k} = \ln|2\pi n| + (2k+1)i\pi/2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

10.27. Исключительное значение $A = 0$, $\tau_A = 1$, $\rho = 2$.

10.38. 1) $\gamma(t) = A/(t-a)$; 2) $\gamma(t) = 1/(t^2+1)$; 3) $\gamma(t) = t/(t^2+1)$;

4) $\gamma(t) = 1/(t^2-1)$; 5) $\gamma(t) = t/(t^2-1)$.

10.39. $\gamma(t) = \sum_{j=1}^{k}\left(A_j/(t-\alpha_j)\right)$

10.40. Для круга опорная функция $k(\varphi) \equiv \sigma$, для отрезка мнимой оси $[-\sigma i, \sigma i]$ опорная функция $k(\varphi) = \sigma|\sin\varphi|$.

10.44.

1) Сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – точка $t = a$;

2) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – отрезок мнимой оси $[-i, i]$;

3) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – отрезок мнимой оси $[-i, i]$;

4) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – квадрат, вершины которого расположены в точках $1 \pm i, -1 \pm i$;

5) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – отрезок действительной оси $[-1, 1]$;

6) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – отрезок действительной оси $[-1, 1]$;

7) сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – выпуклый многоугольник, определяющий квазиполином.

10.51.

1) $h(\varphi) = \cos\varphi$; 2) $h(\varphi) = |\sin\varphi|$; 3) $h(\varphi) = |\sin\varphi|$;

4) $h(\varphi) = |\cos\varphi|$; 5) $h(\varphi) = |\cos\varphi|$; 6) $h(\varphi) = \cos n\varphi$;

7) $h(\varphi) = \cos\varphi$, если $\cos\varphi \geq 0$, $h(\varphi) = 0$, если $\cos\varphi < 0$.

10.52. Индикатриса роста $h^*(\varphi)$ функции $F(z)$ равна $h(\varphi)$, если $h(\varphi) > 0$; $h^*(\varphi) \leq 0$, если $h(\varphi) = 0$, $h^*(\varphi) = 0$, если $h(\varphi) < 0$.

10.53. Если квазиполином $p(z) = j = 1, \ldots, k$, то индикатриса роста $h^*(\varphi) = \varphi_j = \arg d_j, j = 1,\ldots, k$.

10.57. Рассмотреть пример функции $f(z) = 1 + e^z$.

10.60. Функция $f(z) = 1 + e^{z\ln 2}$ – целая функция экспоненциального типа. В точках $z = 0, 1, 2, \ldots$ принимает целые значения, но не является многочленом. Сопряженная диаграмма $\overline{D}$ – точка $t = \ln 2$, которая лежит на границе области G.

10.66.

1) $\operatorname{Re} z \leq 0$; 2) $\operatorname{Re} z = 0$; 3) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$; 4) $\operatorname{Im} z \geq 0$; 5) $\operatorname{Im} z \geq 0$;

6) всюду расходится; 7) $\operatorname{Im} z \geq 0$; 8) $\operatorname{Im} z > 0$; 9) $\operatorname{Im} z > 0$.

10.67.

1) $\{\operatorname{Re} z < 0\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$; 2) $\{\operatorname{Re} z > 0\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$;
3) $-\ln 2 < \operatorname{Im} z < \ln 2$; 4) $\{\operatorname{Re} z < 2\} \cap \{\operatorname{Im} z > -2\}$;
5) внутренность квадрата с вершинами $1 \pm i, -1 \pm i$.

10.72.

1) $c = r = a = 0$; 2) $c = r = a = 0$; 3) $c = r = a = 0$;
4) $c = r = a = -\infty$; 5) $c = r = -1, a = 0$; 6) $c = r = 0, a = 1$;
7) $c = r = a = -1$; 8) $c = -\infty, r = -\infty, a = 1$; 9) $c = r = a = -1$.

10.80. Область сходимости – внутренность квадрата с вершинами в точках $a(1 \pm i)$, $a(-1 \pm i)$

Глава 11

11.1. 1) Нет; 2) нет.

11.3. 1) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}1}{(2n+1)!}$; 2) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$;

3) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z \neq 0$; 4) $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \sin z \neq 0$;

5) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; 6) $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

7) $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; 8) $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;

9) см. 11.44; 10) см. 11.46.

11.7. 1) Нет; 2) нет; 3) нет.

11.8.

1) $z = \operatorname{Arc}\sin c = \operatorname{Ln}(ic + \sqrt{1-c^2})/i = \arg(ic + \sqrt{1-c^2}) +$
$+ 2k\pi - i\ln|ic + \sqrt{1-c^2}|, k \in \mathbf{Z}$;

2) $z = \operatorname{Arccos} c = \operatorname{Ln}(c + \sqrt{c^2-1})/i = \arg(c + \sqrt{c^2-1}) +$
$+ 2k\pi - i\ln|c + \sqrt{c^2-1}|, k \in \mathbf{Z}$;

3) $z = \operatorname{Ln} c = \ln|c| + i\arg c + 2k\pi i, k \in \mathbf{Z}$.

11.38. 1) 0 и ∞ точки ветвления второго порядка;
2) 1 и -1 точки ветвления второго порядка;
3) 0 и ∞ точки ветвления второго порядка.

11.40 $i^i = e^{-\pi/2+2k\pi}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

11.49. 1) $f(-2) = \ln 2 + \pi i$, $f(3) = \ln 3 + 2\pi i$, $f(-4) = \ln 4 + \pi i$.

2) $f(z) = \ln 3 + 2\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-3)^n}{n3^n}$.

11.51. 1) $f_\alpha(i) = e^{i\pi/4}$; 2) $f_\alpha(i) = -e^{i\pi/4}$.

11.58. $f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{1/2}^n z^{-2n}$.

11.60. Пусть $z \in \mathbf{R}$. $f(z + i0) = \ln((1 - z)/(1 + z))$, если z лежит на верхнем берегу разреза $(-1, 1)$; $f(z) = \ln((z-1)/(z+1))$, если $z > 1$; $f(z) = \ln((z-1)/(z+1)) - i\pi$, если $z < -1$; $f(z - i0) = \ln((1-z)/(1+z)) - 2\pi i$, если z лежит на нижнем берегу разреза $(-1, 1)$. Пусть $y > 0$, тогда $f(iy) = 2i \operatorname{arctg} y$.

11.61. $f(z) = -\left(\pi i + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2}{(2n+1)\,z^{2n+1}}\right), 1 < |z| < \infty.$

11.66. $f(-1) = e^{i\pi/4}\sqrt[4]{8}; f'(-1) = -58^{-3/4}e^{i\pi/4}; f''(-1) = -3\cdot 8^{-7/4}e^{i\pi/4}.$

11.76. Если D – односвязная область, то функция $\sqrt{f(z)}$ будет иметь однозначные аналитические ветви.

11.77. 1) Любая ветвь удовлетворяет;

2) любая ветвь удовлетворяет данному условию;

3) одна ветвь.

11.78. 1) Допускает; 2) нет; 3) нет; 4) допускает.

11.79. 1) $\sqrt{1-z^2} = \pm\left(1 - \dfrac{z^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(2n-3)!!}{n!2^n} z^{2n}\right), |z| < 1;$

2) $(1-z^2)^{-1/2} = \pm\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!\,z^{2n}}{(n!)^2\,2^{2n}}, |z| < 1.$

11.80. 1) $\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1;$

2) $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n!}, |z| < 1.$

11.81. $\ln\dfrac{z+a}{z-a} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \dfrac{1}{z^{2n+1}}, |z| > a.$

11.82.

1) $-2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)z^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} + (2k+1)\pi i,$

$k = 0, \pm 1, \ldots;$

2) $2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)z^{2k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^k 4^k}{k\,z^{2k}} + 2n\pi i,$

$|z| > 2, n = 0, \pm 1, \ldots .$

11.83. $\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1/3\cdot(1/3+1)\cdot\ldots\cdot(1/3+n-1)}{n!} z^{-n}\right) e^{i\pi/3}.$

11.84.

1) $z = 0, -1/(\pi^2), \infty$ – точки ветвления;

2) $z = -k^2\pi^2$, $k \in \mathbf{N}$, полюсы первого порядка, $z = \infty$ – неизолированная особая точка, $z = 0$ – устранимая особая точка.

11.85. 1) Нет; 2) в окрестности $a = \infty$ не допускает; 3) допускает;

4) не допускает; 5) не допускает; 6) не допускает;

7) допускает; 8) не допускает.

11.86. 1) Алгебраическая точка ветвления 1-го порядка;

2) логарифмическая точка ветвления.

11.87. 1) $z = \pm 3$; 2)) $z = \pm 2i$; 3)) $z = \pm 2i$.

11.88. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$.

11.89. $1/(1-z)$.

11.90. *Указание*. Пусть γ_β – луч $0 \le |\zeta| < \infty$, $\arg \zeta = \beta$, $0 \le \beta < \alpha$. Функция $f(\zeta)$ регулярна и ограничена в угле $|\arg \zeta| \le \alpha < \pi/2$, тогда ее преоб разование Лапласа $F(z)$ можно аналитически продолжить в угол $|\arg \zeta| < \pi/2 + \alpha$. Рассмотреть функции

$$F_\beta(z) = \int_{\gamma_\beta} e^{-z\varsigma} f(\varsigma) d\varsigma.$$

11.97. 1) В области $1 < r < e^\alpha$, $0 < \varphi < b$;

2) кольцо $1 < r < e^\alpha$, $\varphi > 0$;

3) кольцо $1 < r < e^\alpha$.

11.98. 1) В правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$;

2) во всю полуплоскость с разрезом по действительной оси.

11.99. Вся плоскость с разрезом по отрезку мнимой оси $[-i, i]$.

11.106. 1) $0 < \operatorname{Re} z < 1$; 2) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$.

Глава 12

12.1. $-2c_0c_1$.

12.3. $\dfrac{2\varphi'(z_0)}{\psi''(z_0)} - \dfrac{2}{3}\dfrac{\varphi(z_0)\psi'''(z_0)}{(\psi''(z_0))^2}$.

12.4. $a_{-1}\varphi(z_0) + \dfrac{a_{-2}\varphi'(z_0)}{1!} + \ldots + \dfrac{a_{-k}\varphi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$.

12.6. 1) n; 2) $-p$.

12.7. 1) $n\,\varphi(z_0)$; 2) $-p\,\varphi(z_0)$.

12.8. $R / \varphi'(z_0)$.

12.9. 1) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -1$, $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -2$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$;

2) $\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = (-1)^{m-1} z_2/(z_1 - z_2)^m$, $\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = z_2/(z_2 - z_1)^m$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$;

3) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}_{z=\pm 1} f(z) = -1/2$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$;

4) $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\operatorname*{rez}_{z=\infty} f(z) = (-1)^{n+1} \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$;

5) $\operatorname*{res}_{z=i2\pi n} f(z) = 1,\ n = \pm 1, \pm 2, \dots$;

6) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$;

7) $\operatorname*{res}_{z=2\pi i n} f(z) = -1,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

8) $\operatorname*{res}_{z=\pi n} f(z) = (-1)^n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

9) $\operatorname*{rez}_{z=-i\ln(3\pm 2\sqrt{2})+2n\pi} f(z) = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

10) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$, если $n < 0$ или $n > 0$ – нечетное;

$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$, если $n = 0$ или $n > 0$ – четное,

$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$;

11) $\operatorname*{res}_{z=1/n\pi} f(z) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2},\ n = \pm 1, \pm 2, \dots,\ \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$;

12) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$;

13) $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z) = \mp \dfrac{i}{4e},\ \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$;

14) $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z) = -\dfrac{i}{4e},\ \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{2e}$;

15) $\operatorname*{res}_{z=\frac{n\pi}{1-n\pi}} f(z) = (-1)^n \left(\dfrac{1}{1-n\pi}\right)^2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

16) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1,\ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -1$;

17) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!(n+1)!}$;

18) $\operatorname*{res}_{z=\pi/2+n\pi} f(z) = -1,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

19) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$, если n – нечетное,

$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = (-1)^{l+1}\dfrac{2^{2l}(2^{2l}-1)}{(2l)!}B_{2l}$, если $n = 2l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, где B_{2l} – числа Бернулли, $\operatorname*{res}_{z=\pi/2+m\pi} f(z) = -\dfrac{1}{(\pi/2+m\pi)^m}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

20) $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) =$

$$-\sin 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right].$$

12.10.

1) ± 1; 2) $-2e^{i2\pi a n}$, если $\sqrt{1} = 1$ и $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i n$; 0, если $\sqrt{1} = -1$;

3) 4, если $\left.\sqrt{5-z}\right|_{z=1} = -2$; 0, если $\left.\sqrt{5-z}\right|_{z=1} = 2$;

4) -3, если $\operatorname{Ln}(1+z)|_{z=0} = i\pi$, 0 для остальных ветвей $\operatorname{Ln}(1+z)$;

5) 2; 6) $a - b$; 7) $\pm(a-b)^2/8$;

8) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$, если $n \geq 0$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Ln}(a/b)$, если $n = -1$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}$, если $n \leq -2$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}$, если $n \geq 0$, $\operatorname{res} f(z) = -2\pi i k$, если $n = -1$, $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i k$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$, если $n \leq -2$;

9) $e^a - e^b$; 10) $\dfrac{11}{3}\lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{z}\sqrt[3]{2z^2-z^3}$

12.11.

1) $-i\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i)$; 3) πi; 4) $-\dfrac{\pi i}{121}$; 5) 0; 6) $2\pi i$;

7) $-2\pi i\cos 1$; 8) $10\pi i$; 9) 0; 10) $2\pi i$; 11) $-(\sin 1 + \cos 1)\,2\pi i$.

12.13.

1) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; 2) $\dfrac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$; 3) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$;

4) $\dfrac{2\pi}{1-a^2}, |a|<1$; $-\dfrac{2\pi}{1-a^2}, |a|>1$;

5) $\dfrac{2\pi}{n!}$, если $n \geq 0$, 0, если $n < 0$; 6) $\dfrac{\pi}{a}(1-\sqrt{1-a})$; 7) $\pi\dfrac{1+a^4}{1-a^2}$;

8) $\dfrac{\sin(\pi(b-a)/2)\cdot\Gamma(a+1)\cdot\Gamma((b-a)/2)}{2^{a+1}\Gamma\left((a+b)/2+1\right)}$; 9) $2\pi\left(-\dfrac{i}{2}\right)^n$;

10) 0, если $n=2l$, $\dfrac{2\pi(-1)^l a^{2l+1}}{1-a^2}$, если $n=2l+1$;

11) если $n=k+2t$, $t\geq 1$, то интеграл равен 2π, в любом другом случае интеграл равен нулю;

12) πq^k; 13) $2\pi q^k$; 14) πq^k; 15) $-2\pi q^k/k$.

12.16.

1) $-\pi/27$; 2) $\sqrt{2}\,\pi/2$; 3) $n>\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{\Gamma(n-1/2)}{(n-1)!}$; 4) $\pi/(4a)$;

5) $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$; 6) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$; 7) $\dfrac{\pi}{n}\dfrac{\sin(\pi/2n)}{\sin(\pi/n)}$; 8) $\pi\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n(n-1)!}$;

9) $\dfrac{\pi}{32}\dfrac{1}{a^{3/2}b^{5/2}}$; 10) $a^{-n}\dfrac{2\pi\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n(n-1)!}$; 11) $\dfrac{1}{n}\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{m+1}{n}\pi}$.

12.18.

1) $\dfrac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$; 2) $\dfrac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{\pi}{4a^3}(a+1)e^{-a}$;

4) $\dfrac{\pi}{2}$; 5) $\dfrac{3\pi}{8}$; 6) $\pi(e^{-1}-2^{-1})$;

7) $\dfrac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$; $\dfrac{\pi}{2b^4}[1-(4+ab)e^{-ab}]$; 8) $\dfrac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$;

9) $\dfrac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\dfrac{e^{-a}}{a}-\dfrac{e^{-b}}{b}\right)$; при $a=b$ интеграл равен $\dfrac{\pi}{4}e^{-a}\dfrac{(a+1)}{a^3}$;

10) $\pi a/2$; 11) $\pi/3$; 12) $\pi/4$; 13) $\pi/4$; 14) $\dfrac{3}{8}\ln|\alpha/\beta|$.

12.19.

1) $2\pi i\sin t$; 2) 0; 3) $\dfrac{i\pi}{2}(1+t)e^{-t}$; 4) $\pi(t-i)e^{it}$;

5) 1, если $a>1$, 0, если $0<a<1$; 6) $\ln a$, если $a>1$, 0, если $0<a<1$;

7) $\dfrac{1}{\pi(1+a)}$; 8) $\dfrac{\ln^n t}{n!}$, если $t>1$; 0, если $0<t<1$; если $t=1$, то 0 при $n>1$ и ½ при $n=1$; 9) $t^n/n!$.

12.23.

1) $\pi i \operatorname{sgn} a$; 2) $\pi(2\sin 2 - 2\sin 3)$; 3) $-\dfrac{\pi}{a}\dfrac{\varsigma}{\varsigma + a^2}$; 4) $\pi i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\zeta)$;

5) $\dfrac{\pi}{3}\left[\sin|a| + \exp(-|a|\sqrt{3}/2)\left(\sin\left|\dfrac{a}{2}\right| + \sqrt{3}\cos\dfrac{a}{2}\right)\right]$;

6) $\dfrac{i\pi}{\varsigma - z}[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\varsigma) - \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)]$; 7) $\dfrac{2\pi i}{\varsigma - z}(e^{i\varsigma} - e^{iz})$; 8) $i\pi \operatorname{sh}\zeta$;

9) πi; 10) $-\pi i$; 11) $\pi\alpha \operatorname{sgn}\alpha$; 12) 0.

12.25.

1) $\pm 2\pi$; 2) $-2i\pi$, если $\ln(z-2)|_{z=1} = -\pi i$, то 0, для остальных ветвей $\ln(z-2)$; 3) $-2i\pi\cos 1$, если $\ln(z)|_{z=1} = \pi i$, и 0 для остальных ветвей $\ln z$;

4) $2i\pi(2n+1)$, если $\operatorname{arctg}(z)|_{z=\infty} = \pi/2 + ni\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;

5) $i\pi$, если $\sqrt{4z^2+4z+3} > 0$ при $z > 1$; $-i\pi$, если $\sqrt{4z^2+4z+3} < 0$ при $z > 1$;

6) $\pm 2i\pi$; 7) $\pm i\pi(b-a)^2/4$; 8) $\pm 2i\pi$; 9) $\pm 2i\pi(a-b)b$.

12.27. 1) $\lambda^{\alpha-1}\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$; 2) $\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{k^{\alpha-1}}{(k-1)!(n-k)!}$;

3) $\dfrac{\pi}{2\cos\dfrac{p\pi}{2}}$; 4) $\dfrac{\pi(1-p)}{4\cos\dfrac{p\pi}{2}}$, при $p = 1$ интеграл равен ½;

5) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\dfrac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}$; 6) $-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{e^{\pi}}{\operatorname{ch}(\pi/2)}$;

7) $\dfrac{\pi\sin(\ln 2)}{4\operatorname{ch}(\pi/2)}$; 8) $\dfrac{1}{n}\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{m+1}{n}\pi}$.

12.29. 1) $\dfrac{\Gamma(p)\cos\dfrac{p\pi}{2}}{a^p}$; 2) $\dfrac{\Gamma(p)\sin\dfrac{p\pi}{2}}{a^p}$; 3) $\dfrac{1}{p}\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)\sin\dfrac{\pi}{2p}$;

4) $\dfrac{1}{p}\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)\cos\dfrac{\pi}{2p}$; 5) $\cos\lambda$; 6) $\sin\lambda$.

12.30. 1) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$; 2) 0; 3) $\pi/4$; 4) $\pi\operatorname{ctg} p\pi$; 5) $\pi\operatorname{ctg} p\pi$;

6) $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{p\pi}{2}$; 7) $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}$; 8) $\pi \operatorname{th} 2\pi$;

9) $\dfrac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a\pi}$ при $a \neq 1$, $\ln 2$ при $a = 1$; 10) $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{th}\dfrac{\pi\alpha}{2}$.

12.31.

1) $\dfrac{\pi \ln a}{2a}$; 2) $\dfrac{\pi}{2a}\left(\ln^2 a + \dfrac{\pi^2}{4}\right)$; 3) $\dfrac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin \pi a}(\ln a - \pi \operatorname{ctg} \pi a)$;

4) $\pi a^{\alpha-1}\left(-\operatorname{ctg}\pi a \ln a + \dfrac{\pi}{\sin^2 \pi a}\right)$; 5) $\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{a}{a+1}\right)^2$;

6) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{\ln a}$, $a = 1$, $I = 1/2$; 7) $\dfrac{\pi}{2a\left(\ln^2 a + \dfrac{\pi^2}{4}\right)} - \dfrac{1}{1+a^2}$;

8) $\dfrac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\dfrac{3}{2}\ln a - 1 - \dfrac{3\pi}{4}\right)$; 9) $-\dfrac{\pi}{a^{3/2}} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\ln a}{a^{3/2}}$; 10) $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$.

12.32.

1) $\dfrac{\pi p(1-p)}{2^{3-p}\sin p\pi}$; 2) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(2^{p/2}\cos\dfrac{p\pi}{4} - 1\right)$; 3) $\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2}\dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$;

4) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(2^p(1-p/2)-1\right)$; 5) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left[1-\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^p\right]$;

6) $\dfrac{\pi p}{\sin p\pi}\dfrac{a^{p-1}}{(1+a)^{p+1}}$; 7) $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(\sin\dfrac{p\pi}{2} + \cos\dfrac{p\pi}{2} - 1\right)$;

8) если $b \notin (0,1)$, то $I = \dfrac{\pi}{\sin p\pi} b^{p-1}(b-1)^p$, если $b \in (0,1)$, то

$I = -\pi b^{p-1}(1-b)^p - \operatorname{ctg} p\pi$; 9) $\dfrac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$; 10) 0; 11) π^2.

12.44. Счетное число нулей.

12.47. Один простой нуль.

Глава 13

13.6.

1) При $n = 2$ однолистна в области, в которой нет точек z_1, z_2, $z_1 = -z_2$;

2) однолистна в области, в которой нет различных точек z_1, z_2, $z_1 z_2 = 1$;

3) однолистна в области, в которой нет точек z_1, z_2,

$$z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

4) однолистна в области, в которой нет различных точек z_1, z_2,

$$z_1 = -(-1)^n z_2 + n\pi, \; ; n = \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

5) однолистна в области, в которой нет различных точек z_1, z_2,

$$z_1 = \pm z_2 + 2n\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

6), 7) однолистна в области, в которой нет различных точек z_1, z_2,

$$z_1 = z_2 + n\pi, \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

13.18. Пусть $a, b \in \mathbf{R}$ и $a > 0$.

1) $w = az + b$; 2) $w = -az + b$; 3) $w = -i(az + b)$; 4) $w = az + bi$.

13.19. $w = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{b_2 - b_1}(z - ib_1)\exp\left(-i(\pi/2 + \operatorname{arctg} k)\right)$.

13.20. $w = e^{i\alpha}Rz + w_0$.

13.21. Пусть $w = u + iv$, тогда:

1) семейство прямых $u = a^{-1}$; 2) семейство прямых $v = -b^{-1}$;

3) семейство окружностей $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$ и прямая $u = -v$;

4) пучок прямых $v = -ku$;

5) пучок окружностей, проходящих через начало координат и через точку $w_0 = (x_0 + iy_0)^{-1}$;

6) семейство кривых $u^2 = -v^3/(v + a)$ – так называемые *циссоиды*.

13.22.

1) Семейство окружностей

$$(c - x_0)[(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2] - (u - h_1) = 0,$$

$$(c - y_0)[(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2] - (v - h_2) = 0$$

и прямые $u = h_1$, $v = h_2$;

2) семейство окружностей $|w - h| = R^{-1}$ и семейство лучей $\arg(w - h) = -\alpha$.

13.32. 1) $w = e^{-i\alpha}(z - z_0)/(z - \overline{z}_0)$, $\operatorname{Im} z_0 > 0, \alpha \in \mathbf{R}$;

2) $w = e^{i\alpha}(z - z_0)/(z - z\overline{z}_0)$, $|z_0| < 1, \alpha \in \mathbf{R}$.

13.39. 1) $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc > 0$;

2) $w = i\dfrac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc < 0$;

3) $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc < 0$;

4) $w = i\dfrac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc > 0$.

13.40. $w = \dfrac{R-z}{R+z}$.

13.41.

1) $w = \dfrac{-2i(z+1)}{4z-1-5i}$; 2) $w = \dfrac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$;

3) $w = \dfrac{(1+i)z+1+3i}{(1+l)z+3+i}$; 4) $w = \dfrac{iz+z+i}{z+1}$; 5) $w = \dfrac{(1-i)(z+1)}{2}$.

13.42.

1) $w = \dfrac{(-1+3i)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; 2) $w = \dfrac{iz+2+i}{z+1}$.

13.43. $w = \dfrac{(3-i)z-(1+i)}{(i+1)(1-z)}$.

13.44.

1) $\dfrac{2+i}{5}$; 2) $\dfrac{9(2+i)}{5}$; 3) $\dfrac{9}{2}+i$.

13.45.

1) $|z| = 2$; 2) $\mathrm{Re}\, z = ½$; 3) $|z - ¼| = ¼$;

4) $\mathrm{Re}\, z\, \mathrm{Re}\, z_0 + \mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Im}\, z_0 = ½$; 5) $|z - z_0| = \sqrt{|z_0|^2-1}$;

6) $|z|^4 - ((\mathrm{Re}\, z)^2 - (\mathrm{Im}\, z)^2 = 0$;

7) криволинейный треугольник с вершинами в точках $\overline{z}_1^{\,-1}$, $\overline{z}_2^{\,-1}$, $\overline{z}_3^{\,-1}$, сторонами которого являются дуги окружностей, проходящих через пару вершин и точку $z = 0$.

13.46.

1) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$; 2) $w = i\dfrac{z-2i}{z+2i}$; 3) $w = e^{i(\pi/2+0)}\dfrac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}$.

13.47. $w - w_0 = Ri\dfrac{z-i}{z+i}$.

13.48. $w = -\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

13.49. $\dfrac{w-b}{w-\overline{b}} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$.

13.50.

1) $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$; 2) $w = \dfrac{2iz+1}{2+iz}$; 3) $w = -iz$; 4) $\dfrac{w-a}{1-\overline{a}w} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

13.51. $R\dfrac{w-w_0}{R^2-\overline{w}_0 w}=e^{i\alpha}r\dfrac{z-z_0}{r^2-\overline{z}_0 z}.$

13.52. $w=2\dfrac{z-2+i}{iz+2-2i}.$

13.53. $\dfrac{w-a}{1-\overline{a}w}=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_1}{z-\overline{z}_1 z}$, где $\varphi=\pi-\arg\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}$,

$$a=\frac{|z_2-z_1|}{|1-\overline{z}_1 z_2|+\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}.$$

13.54.

1) $w=R^2e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-\overline{a}z}$; 2) $\dfrac{w-b}{R^2-\overline{b}w}=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-\overline{a}z}$;

3) $w=R^2\dfrac{z-a}{R^2-az}$, везде $\alpha\in\mathbf{R}$.

13.55.

1) $w=z$; 2) $w=\dfrac{z+2-\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})z}$; 3) $w=i\dfrac{z-2+\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})z}$.

13.57. $w=\dfrac{(R-ki)z-R^2}{z-(R+ki)}$, $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, если $k=\infty$, то $w=z$.

13.63.

1) $w=-20/z$; 2) $w=-(2iz+1+2i)$.

13.64.

1) $w=\dfrac{z-\sqrt{h^2-R^2}}{z+\sqrt{h^2-R^2}}e^{i\alpha}$, $\rho=h/R+\sqrt{(h/R)^2-1}$;

2) $w=2e^{i\alpha}\dfrac{4z-3}{4z+3}$ или $w=e^{i\alpha}\dfrac{4z+3}{4z-3}$, $h=5/4$.

13.65.

1) Двусвязная область, ограниченная окружностями $|z-z_1|=r_1$, $|z-z_2|=r_2$ ($|z_2-z_1|>r_1+r_2$ или $|z_2-z_1|<|r_2-r_1|$). Отображается на концентрическое кольцо с центром в начале координат с помощью функции

$w=\dfrac{z-z_1'}{z-z_2'}$ или $w=\dfrac{z-z_2'}{z-z_1'}$, где

$$z_1'=z_1+\frac{u_1(z_2-z_1)}{d},\quad z_2'=z_2+\frac{u_2(z_2-z_1)}{d},\ d=|z_2-z_1|,$$

при этом

$$u_1 = \frac{1}{2d}(r_1^2 + d^2 - r_2^2 - \sqrt{\left[d^2 - (r_1 + r_2)^2\right]\left[d^2 - (r_1 - r_2)^2\right]},$$

$$u_2 = \frac{1}{2d}(r_1^2 + d^2 - r_2^2 + \sqrt{\left[d^2 - (r_1 + r_2)^2\right]\left[d^2 - (r_1 - r_2)^2\right]},$$

$\rho = \left|\dfrac{(d - r_2 - u_1)(r_1 - u_2)}{(d + r_2 - u_2)(r_1 - u_1)}\right|$. В нашем случае $d = ½$, $r_1 = r$, $r_2 = ½$.

2) $w = \dfrac{2z}{z+24}e^{i\alpha}$ или $w = \dfrac{z+24}{3z}e^{i\alpha}$, $\rho = 2/3$.

13.66.

1) $w = e^{i\alpha}z$; 2) $\dfrac{w-1}{w+1} = e^{i\alpha}\dfrac{z-1}{z+1}$; 3) $\dfrac{w-i}{w+i} = e^{i\alpha}\dfrac{z-i}{z+i}$;

4) $\dfrac{w-a}{1+w\bar{a}} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1+z\bar{a}}$.

13.70. В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $w_1(z)$ и $w_2(z) = -w_1(z)$, $w_1(1) = 1$. Функция $w = w_1(z)$ конформно отображает эту область на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, а $w = w_2(z)$ – на $\operatorname{Re} w < 0$.

13.71. Функция $w = i(z^2 - a^2)$, $a \neq 0$, отображает конформно внутренность правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ на верхнюю полуплоскость.

13.72. Функция $w = \sqrt{z - p/2} - i\sqrt{p/2}$, $p > 0$, отображает конформно внешность параболы $y^2 = 2px$ на верхнюю полуплоскость.

13.74.

1) $w = -\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$; 2) $w = -\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3}$;

3) $w = \left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3}$; 4) $w = i\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$;

5) $w = \left(\dfrac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right)^{4}$.

13.75.

1) $w = \sqrt{\dfrac{z+1}{1-z}}$; 2) $w = \sqrt{\dfrac{z-z_1}{z_2-z}}$; 3) $w = \sqrt{\dfrac{z+R}{z-R}}$;

4) $w = \sqrt{\dfrac{z+1}{1-z}}\exp\left(-\dfrac{i}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{1-h^2}\right)$; 5) $w = \sqrt{z^2+h^2}$.

13.76.

1) $w(z) = -(z + 1/z)/2$;

2) Например, $w(z) = \sqrt{z/(1-z)}$; берется та ветвь квадратного корня, что $w(2) = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$;

3) например, $w(z) = \sqrt{(1+z)/(z-1)}$; берется та ветвь квадратного корня, что $w(0) = \sqrt{-1} = i$.

4) $w = \sqrt[3]{i\dfrac{z+1}{z-1}}$; 5) $w = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{2/3}$; 6) $w = \left(\dfrac{z}{1-z}\right)^{4/3}$.

13.77. Угол $0 < \arg(z+n) < \pi/n$; полоса $0 < y < \pi$.

13.79.

1) В полярную сетку $\rho = \text{const}$, $\theta = \text{const}$;

2) в спирали $\rho = \exp\left(\dfrac{\theta - b}{k}\right)$, при $k = 0$ в лучи $\theta = b$;

3) в угол $\alpha < \theta < \beta$, при $\alpha = 0$ и $\beta = 2\pi$ в плоскость с разрезом по положительной части действительной оси;

4) во всю плоскость с разрезом по спирали $\rho = e^{\theta}$;

5) в сектор $\rho < 1$, $0 < \theta < \alpha$, при $\alpha = 2\pi$ в единичный круг с разрезом по радиусу $v = 0, 0 \le u \le 1$;

6) в область $\rho > 1$, $0 < \theta < \alpha$, при $\alpha = 2\pi$ во внешность единичного круга с разрезом по лучу $v = 0$, $1 \le u < \infty$;

7) в область $e^{\alpha} < \rho < e^{\beta}$, $\gamma < \theta < \delta$, при $\delta - \gamma = 2\pi$ концентрическое кольцо с разрезом по отрезку $\theta = \gamma$, $e^{\alpha} \le \rho \le e^{\beta}$.

13.80. 1) В прямоугольную сетку $u = c$, $v = c$;

2) если $w = u + iv$, то образ есть прямая $u = \ln A + kv$;

3) в полосу $0 < v < a$;

4) в полуполосу $0 > u$, $0 < v < a$;

5) в прямоугольник $\ln r_1 < u < \ln r_2$.

13.84.

1) $w = \sqrt{\dfrac{1 + 2^{-1}(z + z^{-1})}{5/4 - 2^{-1}(z + z^{-1})}}$; 2) $w = \sqrt{2^{-1}[(a + a^{-1}) - (z + z^{-1})]}$;

3) $w = \sqrt{2^{-1}(z + z^{-1} + a + a^{-1})}$; 4) $w = \dfrac{\sqrt{z^2 + z^{-2} + a^2 + a^{-2}}}{z + z^{-1}}$;

5) $w = \sqrt{2^{-1}(z^2 + z^{-2} + a^2 + a^{-2})}$.

13.85. $w + w^{-1} = \left[1 + \dfrac{h^2}{4(1-h)}\right]^{-1}\left[\left(\dfrac{z}{e^{i\alpha}} + \dfrac{e^{i\alpha}}{z}\right) - \dfrac{h^2}{2(1-h)}\right]$.

13.86.

1) Образом окружности является дуга окружности с концами в точках ± 1, наклоненная в точке 1 под углом 2α к действительной оси, внешность этой окружности отображается на всю плоскость с разрезом по указанной дуге;

2) образом окружности является замкнутая кривая, называемая *профилем Жуковского*, с точкой возврата $w = 1$, причем касательная в этой точке образует с действительной осью угол 2α; внешность этой окружности отображается на внешность профиля Жуковского.

13.88.

1) Семейство $x = c$ отображается в семейство гипербол с фокусами в точках ± 1: $u^2/\cos^2 c - v^2/\sin^2 c = 1$; семейство $y = c$ – в семейство эллипсов с фокусами в точках ± 1: $u^2/\mathrm{ch}^2 c - v^2/\mathrm{sh}^2 c = 1$;

2) в верхнюю полуплоскость;

3) в четвертый координатный квадрант;

4) в правую полуплоскость с разрезом по отрезку [0, 1];

5) во всю плоскость с разрезами по действительной оси вдоль лучей $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$;

6) во внутренность эллипса $u^2/\mathrm{ch}^2 h - v^2/\mathrm{sh}^2 h = 1$ с разрезом по отрезкам $[-\mathrm{ch}\, h, -1]$ и $[1, \mathrm{ch}\, h]$.

13.89.

1) Семейство $x = c$ отображается в пучок дуг окружностей с концами в точках $w = \pm i$, включающий и соответствующие части мнимой оси; уравнение пучка окружностей $(u - a)^2 + v^2 = 1 + a^2$, $a = \mathrm{ctg}\, 2c$, семейство $y = c$ отображается в семейство *окружностей Аполлония* относительно точек $w = \pm i$, включающее и действительную ось; уравнение семейства окружностей Аполлония: $u^2 + (v - b)^2 = b^2 - 1$, $|b| > 1$, $b = \mathrm{cth}\, 2c$;

2) в верхнюю полуплоскость с разрезом по мнимой оси вдоль отрезка $0 \le v \le 1$;

3) во всю плоскость с разрезами по мнимой оси вдоль отрезка $-1 \le v \le 1$;

4) в полукруг $|w| < 1$, $\mathrm{Re}\, w > 0$; 5) в единичный круг.

13.90.

1) Семейство $x = c$ отображается в в семейство эллипсов с фокусами в точках ± 1: $\dfrac{u^2}{\mathrm{ch}^2 c} + \dfrac{v^2}{\mathrm{sh}^2 c} = 1$; семейство $y = c$ – в семейство гипербол с фокусами в точках ± 1: $\dfrac{u^2}{\cos^2 c} - \dfrac{v^2}{\sin^2 c} = 1$;

2) во всю плоскость с разрезами по действительной оси вдоль лучей $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$;

1) $\tau = \dfrac{z-i}{z+i}, \varsigma = C'\int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-\theta_1)^{-\mu_1} ... (\tau-\theta_n)^{-\mu_n} \, d\tau + C'', |\theta_i| = 1,$

$\sum \mu_i = 2;$

2) $\tau = \dfrac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \varsigma = C'\int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-\theta_1)^{-\mu_1} ... (\tau-\theta_n)^{-\mu_n} \dfrac{d\tau}{\tau^2} + C'', |\theta_i| = 1,$

$\sum \mu_i = -2.$

3) $\varsigma = C\int_0^z \dfrac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$; 4) $\varsigma = C\int_0^z \dfrac{(1+t^5)^{2/5}}{(1-t^5)^{4/5}} dt$;

5) $\varsigma = C\int_0^z \dfrac{\sqrt{1-t^4}}{t^2} dt + C''$;

6) если уравнение параболы $\rho = \dfrac{2}{1+\cos\varphi}$, то $\varsigma = i\cos\dfrac{\pi}{2}\sqrt{z}$.

Глава 14

14.3. $f(z) = \int_{z_0}^{z} \dfrac{\partial v}{\partial y} dx - \dfrac{\partial v}{\partial x} dy + C + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + y_0$ – произвольная точка области D, C – действительная константа.

14.8.

1) $-(x^2 - y^2)/2 + C$; 2) $2xy - (x^2 - y^2)/2 + C$; 3) $-\dfrac{y}{(x^2 + y^2)} + C$;

4) $\arg z + C$; 5) $r\varphi \sin\varphi - r\log\cos\varphi$; 6) $-2xy/(x^2 + y^2) + C$;

7) $y \sin y \operatorname{ch} x - x \operatorname{ch} x \cos y + C$; 8) $2 \operatorname{arctg}(x/y) + 2xy + C$;

9) $x \sin x \operatorname{sh} y - y \cos x \operatorname{ch} y + C$.

14.9.

1) $z^2 e^z e^{i\alpha}$, α – действительное; 2) $A\exp\left(z^2/2\right)$, $A > 0$;

3) $\exp\left(z^2 + i\alpha\right)$, α – действительное; 4) Aze^z, $A > 0$.

14.11. A, B – действительные константы:

1) $u = Ax + B$; 2) $u = A \operatorname{arctg}(y/x) + B$; 3) $u = A \log(x^2 + y^2) + B$;

4) $u = A(x^2 - y^2) + B$; 5) $u = Ax/(x^2 + y^2) + B$; 6) $u = Axy + B$.

14.12. A, B – действительные константы:

1) $Ax + B$; 2) $A \operatorname{arctg}(y/x) + B$; 3) $Ax/(x^2 + y^2) + B$; 4) $Ay/(x^2 + y^2) + B$.

14.13. $|f(z)|$ – нет, $\arg f(z)$ и $\log |f(z)|$ – да.

3) в верхнюю полуплоскость.

13.91.

1) Во всю плоскость с разрезами по действительной оси вдоль лучей $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$;

2) в правую полуплоскость с разрезом по действительной оси вдоль луча $[1, \infty)$.

13.92.

1) В полуполосу $|u| < \pi/2$, $v > 0$; 2) в полосу $|u| < \pi/2$;

3) в полуполосу $0 < u < \pi/2$, $v > 0$; 4) в полосу $-\pi/2 < u < 0$.

13.93.

1) $w = \sqrt{\dfrac{z-b}{z-a}}$, $w\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = i$;

2) $w = \sqrt{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}$, $w(x+0i) > 0$, при $x > 1$;

3) сначала $\varsigma = e^z$, далее как в 13.93, 2);

4) сначала $\varsigma = e^z$, далее как в 13.93, 1);

5) сначала $\varsigma = \operatorname{ch} z$;

6) сначала $\varsigma = z^{-1}$ отображает на полосу $0 < \operatorname{Re} \varsigma < 2^{-1}$ с разрезом $[3^{-1}, 2^{-1}]$;

7) сначала $\varsigma = 2^{-1}(z + z^{-1})$ отображает на полуполосу $4^{-1} < \operatorname{Re} \varsigma < 2^{-1}$, $\operatorname{Im} \varsigma > 0$;

8) $\varsigma = \left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)\dfrac{2}{b-a}$; $w = \varsigma + \sqrt{\varsigma^2 + 1}$, $w(\infty) = 0$;

9) сначала $\varsigma = z^{-1}$ отображает на плоскость с разрезом по отрезку $[2^{-1}(a + a^{-1}), 1]$;

10) сначала $\varsigma = 2^{-1}(z + z^{-1})$ отображает на внешность отрезка $[2^{-1}(a + a^{-1}), 2^{-1}(b + b^{-1})]$;

11) $w = \sqrt{2^{-1}(z + z^{-1}) + 1}$.

13.94. $w = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$.

13.95. $w = i\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi}{2\alpha} \operatorname{arch} z\right)$, $0 < \alpha < \pi/2$.

13.96. $w = \left(z^{n/2} + \sqrt{z^n - 1}\right)^{2/n}$.

13.106.

14.14. $f(t) = at + b,\ a,\ b = \text{const}$, только если $u \equiv \text{const}$.

14.16. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,\ u = A\log r + B.$

14.20.1. Не следует.

14.20.3. Утверждение неверно. Достаточно рассмотреть функцию $u(x, y) = \mathrm{Re}(e^z)$ в области $D = \{z = x + iy,\ x \le 0,\ 0 \le y \le 1\}$. Если область D ограничена, то утверждение верно.

14.20.4. Не следует.

14.22. Утверждение неверно. Достаточно рассмотреть функцию $u(x, y) = xy$.

14.26.2. Сопряженная функция

$$v(r,\theta) = \frac{2rR\sin(\theta-\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi)}.$$

14.29.

1) $u(x,y) = 1$; 2) $u(x,y) = x$; 3) $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 4x + 4}$;

4) $u(x,y) = 2xy$; 5) $u(x,y) = x^3 - 3x^2 - 3xy^2 + 3y^2 + 12x - 1$.

14.30.

1) $u(x,y) = 1$; 2) $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}$;;

3) $u(x,y) = \tfrac{1}{2} - (1/\pi)\,\mathrm{arctg}\,((1-x)/y)$; 4) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2}$;

5) $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$.

14.31. $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)(z_0 + Re^{i\varphi}}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi, \quad z = z_0 + re^{i\theta},\ r > R.$

14.33. $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 1.$

14.43. $u(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|\varsigma|=1} \log|z - \varsigma|\,\varphi(\theta)\,|\,d\varsigma\,| + C =$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|\varsigma|=1} \log|z - e^{i\theta}|\,\varphi(\theta)\,d\theta + C,\ |z| < 1.$$

14.45. Функция и ее первые производные ограничены в заданной неограниченной области.

14.54. Утверждение неверно – достаточно рассмотреть $u_n(x, y) = xy$, а область $D = \{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

14.55. $p_1 = x,\quad q_1 = y,\quad p_2 = x^2 - y^2,\quad q_2 = 2xy,$

$p_3 = x^3 - 3xy^2,\quad q_3 = 3x^2 - y^3,\quad p_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,\quad q_4 = 4x^3y - 4xy^3,$

$p_n = r^n \cos n\varphi,\quad q_n = r^n \sin n\varphi,\quad n = 1, 2, \ldots .$

14.56.

а) Утверждение *а*) неверно – достаточно рассмотреть функцию $v(z) = \mathrm{Re}\,(\exp(-i/z))$, а область $D = \{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0\}$;

б) если существует функция $V(t)$, непрерывная на всей действительной оси и ограниченная, то утверждение верное.

Глава 15

15.6.

1) 0; 2) α; 3) 0; 4) 0; 5) $|\mathrm{Im}\, w|$; 6) $|\mathrm{Im}\, w|$; 7) $|\mathrm{Re}\,\lambda|$; 8) $|\mathrm{Re}\,\lambda\,|$.

15.26.

1) $\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}}$, $\beta > -1$, $\mathrm{Re}\, p > 0$; 2) $\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\lambda$;

3) $n!\dfrac{\mathrm{Im}(p+iw)^{n+1}}{(p^2+w^2)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\, p > |\,\mathrm{Im}\, w\,|$;

4) $\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + w^2}$, $\mathrm{Re}\, p > (\mathrm{Re}\,\lambda + |\,\mathrm{Im}\, w\,|)$;

5) $h\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{p} e^{-n\tau p}(1-e^{-p\tau})$, $\mathrm{Re}\, p > 0$.

15.27. $\dfrac{1-e^{-ph}}{ph}$.

15.28.

1) $\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$;

2) $1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$, где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}\, d\eta$ – функция ошибок;

3) $t^{n/2} J_n(2\sqrt{t})$; 4) $J_0(t)$, где $J_n(t)$ – функция Бесселя первого рода порядка n (см. задачу 15.21).

15.29.

1) $(n!)^{-1}t^n$; 2) $(n!)^{-1}en^n t$, $t > 1$; 0, $t < 1$; 0, $t = 1$, $n > 1$; 2^{-1}, $t = 1$; $n = 1$;
3) $(n!)^{-1}e^{at}t^n$; 5) $\sin t$; 6) $\cos t$.

15.32. $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\, \dfrac{dp}{p^4+2p^2+1} = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.

15.33. $x(t) = \alpha \cos \lambda t + (\beta / \lambda) \sin \lambda t$.

15.35. $y(t) = (\sin t - t \cos t)/2$.

15.36.

1) $x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$; 2) $x(t) = e^{-2t}(1 + 4t + t^5/20)$;

3) $x(t) = \dfrac{1}{8}(3-t^2)\sin t - \dfrac{3}{8}t\cos t$;

4) $x(t) = \begin{cases} 2^{-1}(\sin t - t\cos t), & 0<t<\pi, \\ -2^{-1}\pi\cos t, & t>\pi. \end{cases}$

15.37.

1) $x(t) = e^t,\ y(t) = e^t$; 2) $x(t) = 2\operatorname{ch}(\sqrt{2}t)/3 + \cos(t)/3,\ y(t) = z(t) =$
$= -\operatorname{ch}(\sqrt{2}t)/3 + \cos(t)/3$;

3) $x(t) = \begin{cases} 1-e^{-t}, & 0<t<1, \\ 1-e^{-t} - \operatorname{sh}(t-1), & 1<t<2, \\ -e^{-t} - \operatorname{sh}(t-1) + \operatorname{ch}(t-2) & t>2, \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} 1-e^{-t}, & 0<t<1, \\ -e^{-t} + \operatorname{ch}(t-1), & 1<t<2, \\ -e^{-t} - \operatorname{ch}(t-1) + \operatorname{sh}(t-2) & t>2; \end{cases}$

4) $x(t) = -e^{-t},\ y(t) = e^{-t},\ z(t) \equiv 0$;

5) $x(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$; $y(t) = e^{\alpha t}(\sin\beta t - 1)$.

15.38. 1) $\varphi(t) = (e^t - e^{-t})/4 + (\sin t)/2$; 2) $\varphi(t) = 1 - t$.

15.44. 1) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\right)$;

2) $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\eta,\tau)\,d\eta$, где

$$F(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x,t)\,dx;$$

3) $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\exp(-\dfrac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}\,d\eta$;

4) $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta,\tau)\dfrac{\exp\left(-\dfrac{(x-\eta)^3}{4a^2(t-\tau)}\right)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\eta$.

15.45.

1) $u(x,t)=\dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\dfrac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau;$

2) $u(x,t)=\dfrac{-a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\dfrac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau;$

3) $u(x,t)=$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau}}\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]f(\xi,\tau)d\xi.$$

15.46.

1) $u(x,y,t)=$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta;$$

2) $u(x,y,t)=$

$$=\frac{x}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int_0^t\frac{d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta.$$

15.47.

1) $u(x,y,t)=$

$$=\frac{x}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]f(\xi,\eta)d\eta;$$

2) $(x,y,t)=\dfrac{y}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int_0^t\dfrac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi;$

3) $u(x,y,t)=$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

15.48. 1) $u(x,y)=-\dfrac{1}{a}\int_0^x f(x-\xi)\sin a\xi\,d\xi;$

2) $u(x,y)=Ae^{-3y}\cos 2x-\dfrac{B}{2}x\sin x.$

15.49.

1) $u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2nl + x) e^{-\frac{(2nl+x)^2}{4a^2 t}}$;

2) $u(x, t) = \dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-x^2/4a^2 t}$;

3) $u(x, t) = \dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \dfrac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$.

Глава 16

16.3. Нет.

16.31. $F(t) \sim \dfrac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k k!}{t^{(1-\alpha)k}}$, если $\alpha < 1$;

$F(t) = c_0/t$, где $c_0 = \int_0^{\infty} \dfrac{e^{-y}}{1+y} dy$, если $\alpha = 1$, и

$F(t) \sim (\alpha - 1) t^{-\alpha} \log t$, если $\alpha > 1$.

16.40. $\sqrt{2\pi/\lambda} \cos(\lambda - \pi/4) + O(\lambda^{-1})$.

16.49. $f(t) \sim \dfrac{at-3}{a^4}$.

16.50. $f(t) \sim \dfrac{1}{\omega} \sin(\omega t + \pi/4)$.

16.54. $f(x) \sim \dfrac{1}{2x}$.

16.55. $f(x) \sim \sqrt{\pi/x} \cdot (1 + 2e^{-\pi^2/x})$, $x \to +\infty$.

Глава 17

17.2. Любое открытое множество F в нормированном пространстве не является множеством существования.

17.5.

1) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$,

$\| x \|_\infty = \max\limits_{1 \le k \le n} | x_k |$ – не строго выпуклая норма,

$\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^n | x_k |^p \right)^{1/p}$, $p > 1$, строго выпуклая, а при $p = 1$ не строго выпуклая;

2) $f(x)\in L_p[0,1]$, $p\geq 1$, $\| f\|_p=\left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $p>1$, строго выпуклая, а при $p = 1$ не строго выпуклая;

3) $f(x)=C[0,1]$ или $L_\infty[0,1]$, $\| f\|=\sup\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$ или

$\| f\|=\operatorname*{essup}\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$ не строго выпуклые нормы.

17.9. Пусть $X=\mathbf{R}^1, F=[-1,1], x_1=1/2, x_2=1$, тогда $E(1/2, [-1, 1]) = 0$,

$E(1,[-1, 1]) = 0$, $E(1 + ½, [-1, 1]) = ½$, $E(2\cdot 1, [-1,1]) = 1$.

17.10. Пусть $X = \mathbf{R}^2$, $x =(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{½}$,
$F = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}, x_2 = 0\}$, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (0, -1)$, $E(x_1, F) = E(x_2, F) = 1$, но $E(x_1 + x_2, F) = 0$.

17.23. Наилучшим тригонометрическим полиномом является полином $a \cos nx + b \sin nx$. При любом $p \geq 1$ этот наилучший полином единственен.

17.24. Точная нижняя грань равна

$$\frac{1}{q+\overline{q}+1}\prod\nolimits_{k=1}^{n}\left|\frac{q-p_k}{q+\overline{p}_k+1}\right|^2.$$

17.45. Наилучшее приближение равно $\dfrac{(a-\sqrt{a^2-1})^n}{a^2-1}$.

17.46. Пусть $0 < k < 1$, $y = \operatorname{sn}(x, k)$ – функция Якоби, которая определяется из соотношения

$$x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Тогда наилучшее приближение равно $\left(1-\sqrt{1-\lambda^2}\right)/\left(1+\sqrt{1+\lambda^2}\right)$,

где $\lambda=k^{2n+1}\prod\nolimits_{l=1}^{m}\operatorname{sn}^4\left(\dfrac{2l-1}{2n+1}K,k\right)$, $K=\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$.

17.63. Пусть E – замкнутое ограниченное множество, такое, что найдется область G, дополнительная к E, не содержащая бесконечно удаленную точку. Если $z_0 \in G$, то функция $(z - z_0)^{-1}$ аналитична в E и не является равномерным пределом последовательности алгебраических полиномов.

17.68. Пусть $P_k(z) = (z - z_1) \dots (z - z_k) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$, лемниската $\{z \in \mathbf{C}: |P_k(z)| = r,\ r \geq 0\}$ односвязна и ограничивает множество E, содержащее все корни многочлена $P_k(z)$. Положим

$$\Phi(z) = \left[\frac{1}{r} P_k(z)\right]^{1/k},$$

где выбрана такая ветвь корня, что

$$\frac{1}{z}\left[\frac{1}{r} P_k(z)\right]^{1/k} = \left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k}\right)\right]^{1/k} \to \frac{1}{r^{1/k}} \to 0.$$

Если $n = mk$, $m \in \mathbf{N}$, то многочлены Фабера $F_n(z)$ есть

$$F_n(z) = [\Phi(z)]^n = \frac{1}{r^m}(z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k)^m.$$

Если n не кратно k, то

$$[\Phi(z)]^n = \frac{1}{r^{n/k}} z^n \left[1 + \frac{n}{k}\left(\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k} - 1\right)}{2!}\left(\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k}\right)^2 + \dots\right] = F_n(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{z^k}.$$

17.69. $F_0(z) = 1$, $F_n(z) = 2\cos(n \arccos z)$, $n = 1, 2, \dots$.

17.72. Все функции имеют экспоненциальный тип σ.

РЕШЕНИЯ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ

Глава 1

1.3.

1) и 2). Преобразуем выражение

$$(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(1+e^{i\varphi})^n.$$

С одной стороны,

$$(1+e^{i\varphi})^n=\sum\nolimits_{k=0}^{n}C_n^k e^{ik\varphi}=$$

$$=\sum\nolimits_{k=0}^{n}C_n^k\cos k\varphi+i\sum\nolimits_{k=0}^{n}C_n^k\sin k\varphi$$

С другой стороны,

$$(1+e^{i\varphi})^n=\left(2e^{i\varphi/2}\,\frac{(e^{i\varphi/2}+e^{-i\varphi/2})}{2}\right)^n=2^n e^{in\varphi/2}\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}+i2^n\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}.$$

Приравнивая теперь действительные и мнимые части, получаем

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}C_n^k\cos k\varphi=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2},$$

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}C_n^k\sin k\varphi=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}.$$

1.11. 1) и 2). Пусть $z=re^{i\alpha}\neq 1$; рассмотрим сумму

$$e^{ix}(1+z+z^2+\ldots+z^n)=\begin{cases}(n+1)e^{ix}, & \text{если } z=1,\\ e^{ix}\dfrac{(z^{n+1}-1)}{(z-1)}, & \text{если } z\neq 1.\end{cases}$$

Значит, если $z\neq 1$, то

$\cos x+r\cos(x+\alpha)+\ldots+r^n\cos(x+n\alpha)=$

$$=\operatorname{Re}e^{ix}\,\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\operatorname{Re}\frac{e^{ix}(r^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}-1)(re^{-i\alpha}-1)}{(re^{i\alpha}-1)(re^{-i\alpha}-1)}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{r^{n+2}e^{i(x+n\alpha)}-r^{n+1}e^{i(x+(n+1)\alpha)}-re^{i(x-\alpha)}+e^{ix}}{r^2-2r\cos\alpha+1}=$$

$$=\frac{r^{n+2}\cos(x+n\alpha)-r^{n+1}\cos(r+(n+1)\alpha)-r\cos(x-\alpha)+\cos\alpha}{r^2-2r\cos\alpha+1}.$$

1.14. Обозначим искомое множество через Г.

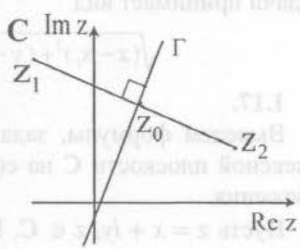
I. Если $z_1 = z_2$, то условие принимает вид $|z - z_1|(1 - k) = 0$. Значит, если $z_1 = z_2$ и $k \neq 1$, то Г состоит из одной точки z_1. Если $z_1 = z_2$ и $k = 1$, то $\Gamma = \mathbf{C}$.

II. Пусть $z_1 \neq z_2$. Если $\operatorname{Im} k \neq 0$, то Г – пустое множество; если $k \in \mathrm{R}$ и $k < 0$, то Г – пустое множество, так как

$$|z - z_1| \geq 0,\ k\,|z - z_2| \leq 0$$

и равенство обеих частей здесь невозможно.

Если $z_1 \neq z_2$ и $k = 0$, то Г состоит из одной точки z_1. Если $z_1 \neq z_2$ и $k \neq 1$, то Г – это ГМТ $z \in \mathbf{C}$, равноудаленных от двух различных точек z_1 и z_2, т. е. Г – прямая на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, перпендикулярная отрезку $[z_1, z_2]$, проходящая через его середину.



Если $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, 2)$, а $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ – точка этой прямой Г, то уравнение прямой Г можно представить в виде

$$(x_2 - x_1)(x - x_0) + (y_2 - y_1)(y - y_0) = 0,$$

где $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, $z_0 = x_0 + iy_0$ – середина отрезка $[z_1, z_2]$. Это уравнение можно записать в виде

$$x\operatorname{Re}(z_2 - z_1) + y\operatorname{Im}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}\left(|z_2|^2 - |z_1|^2\right)$$

или в виде

$$z\overline{(z_2 - z_1)} + \overline{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2.$$

Пусть теперь $z_1 \neq z_2$ и $0 < k \neq 1$. Строим на прямой, определенной точками z_1 и z_2, точки z_3 и z_4 , которые делят отрезок $[z_1, z_2]$ внутренним и внешним образом соответственно в отношении k, т. е.

$$\frac{|z_3 - z_1|}{|z_3 - z_2|} = k = \frac{|z_4 - z_1|}{|z_4 - z_2|},$$

$z_3 \in [z_1, z_2]$, а $z_4 \notin [z_1, z_2]$.

Пусть $z \in \Gamma$; так как $z_2 \notin \Gamma$, то уравнение можно записать в виде $|z - z_1|/|z - z_2| = k$. Ясно, что отрезки $[z, z_3]$ и $[z, z_4]$ – биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника с вершинами в точках z_1, z и z_2. Значит, из точки z отрезок $[z_3, z_4]$ виден под прямым углом, поэтому Г – окружность, построенная на отрезке $[z_3, z_4]$ как на диаметре (окружность Аполлония). Уравнение этой окружности есть $|z - z_0| = R$, где z_0 – середина отрезка $[z_3, z_4]$, а R – половина длины этого отрезка.

Выразим z_0 и R через данные задачи. По определению точек z_3 и z_4 получим $z_3 = (z_1 + kz_2)/(1 + k)$, $z_4 = (z_1 - kz_2)/(1 - k)$. Отсюда

$$z_0 = (z_3 + z_4)/2 = (z_1 - k^2 z_2)/(1 - k^2), \quad R = |z_1 - z_0| = k^2\,|z_2 - z_1| \,/\, |1 - k^2|.$$

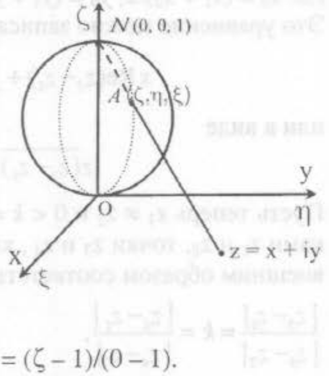
Решение этой задачи можно получить стандартным образом. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, 2)$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Тогда уравнение задачи принимает вид

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = k\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

1.17.

Выведем формулы, задающие стереографическую проекцию комплексной плоскости $\mathbf{C}$ на сферу Римана S, и формулы обратного отображения.

Пусть $z = x + iy$, $z \in \mathbf{C}$. Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат – ось $O\xi$ совпадает с осью Re z, ось $O\eta$ совпадает с осью Im z, ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости $\mathbf{C}$, оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ образуют правую тройку.



Точка $A(\zeta, \xi, \eta)$ – стереографическая проекция точки $z \in \mathbf{C}$ на сферу Римана S.

Координаты точки A находим как координаты точки пересечения сферы Римана, определяемой уравнением

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = (1/2)^2,$$

с прямой, проходящей через точки N, A и z, задаваемой уравнением

$$(\xi - 0)/(x - 0) = (\eta - 0)/(y - 0) = (\zeta - 1)/(0 - 1).$$

Значит, $x = \xi/(1 - \zeta)$, $y = \eta/(1 - \zeta)$, $(\zeta \neq 1)$. Значение $\zeta = 1$ означает, что точка A совпадает с точкой N (северный полюс сферы S). Так как при $\zeta \neq 1$ имеем

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (\xi^2 + \eta^2)/(1 - \zeta)^2 = \xi(1 - \xi)/(1 - \zeta)^2 = \xi/(1 - \zeta),$$

то $1 - \zeta = 1/(1 + |z|^2)$ и $\xi = x/(1 + |z|^2)$, $\eta = y/(1 + |z|^2)$, $\zeta = |z|^2/(1 + |z|^2)$.

1.24.

3) Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\frac{1}{2} < \frac{|z-i|^2}{(1+|z|^2)\cdot(1+|i|^2)} = \frac{1}{2}\,\frac{x^2+(y-1)^2}{1+x^2+y^2},$$

т. е. $x^2 + (y-1)^2 > 1 + x^2 + y^2$ или $-2y > 0$. Значит, $y < 0$. Искомое ГМТ – полуплоскость $\mathrm{Im}\, z < 0$.

1.25.

8) Так как $z = i + e^{i\varphi}$, то

$$|z|^2 = \cos^2\varphi + (1 + \sin\varphi)^2 = 2 + 2\sin\varphi = 2\,(\sin(\varphi/2) + \cos(\varphi/2))^2.$$

Пусть α – одно из значений аргумента z. Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\varphi/2)+\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)-\sin(\varphi/2)} = \frac{1+\mathrm{tg}(\varphi/2)}{1-\mathrm{tg}(\varphi/2)},$$

т. е. $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1+\mathrm{tg}(\varphi/2)}{1-\mathrm{tg}(\varphi/2)}$ (см. задачу 1.12). Значит,

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{2}\,|\sin(\varphi/2)+\cos(\varphi/2)|\,e^{i\alpha/2}, \text{ где } \alpha = \mathrm{arctg}\frac{1+\mathrm{tg}(\varphi/2)}{1-\mathrm{tg}(\varphi/2)}.$$

1.36. б) Доказательство. Пусть $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ – корни многочлена $f(z)$, т. е. $f(z) = (z-z_1)\cdot\ldots(z-z_n)$, тогда $f'(z)/f(z) = 1/(z-z_1) + \ldots + 1/(z-z_n)$.

Пусть $\omega \in \mathbb{C}$ такое, что $f'(\omega) = 0$, $f(\omega) \neq 0$, и ω не принадлежит выпуклой оболочке точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда через точку ω можно провести прямую, не пересекающую выпуклую оболочку указанных точек. Поэтому векторы $\omega - z_1, \ldots, \omega - z_n$ лежат в одной полуплоскости, определенной этой прямой. Так как

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \ (z \neq 0),$$

то в одной полуплоскости лежат векторы $1/(\omega - z_1), \ldots, 1/(\omega - z_n)$, поэтому

$$f'(\omega)/f(\omega) = 1/(\omega - z_1) + \ldots + 1/(\omega - z_n) \neq 0,$$

что невозможно. Значит, ω принадлежит выпуклой оболочке корней $f(z)$.

Глава 2

2.20. Функцию e^z определяем как $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Так как

$$z = x + iy, \text{ то } 1+\frac{z}{n} = 1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n} = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{1/2} e^{i\varphi_n},$$

где $\mathrm{tg}\,\varphi_n = \dfrac{y/n}{1+x/n}$, $n \geq n_0$. Тогда $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^2 + \dfrac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} e^{in\varphi_n}$.

Для доказательства нужно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}\cos(n\varphi_n)=e^x\cos y,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}\sin(n\varphi_n)=e^x\sin y.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{n}{2}\ln(1+x/n)^2+y^2/n^2\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}+o(1/n^2)\right)\right]^{n/2}=e^x$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\cos(n\frac{y}{n})=\cos y,\ \lim_{n\to\infty}\sin(n\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\sin(n\frac{y}{n})=\sin y,$$

так как при $n\to\infty$ имеем $\operatorname{tg}\varphi_n\sim\varphi_n\sim y/n$, $n\varphi_n\to y$.

2.55. Данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся два ряда

$$(1)\quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\quad \text{и}\quad (2)\quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}\ .$$

Ряд (1) сходится при $\alpha>0$ по признаку Лейбница и расходится при $\alpha\le 0$, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда – общий член ряда должен стремиться к нулю. Ряд (2) сходится при $\beta>1$, а при $\beta\le 1$ – расходится. Так как

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+i\frac{1}{n^\beta}\right|=\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}+\frac{1}{n^{2\beta}}\right)^{1/2},$$

то абсолютно ряд сходится при $\min(\alpha,\beta)>1$.

2.58. 4) Пусть $a_k=\dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{z^n}{1+z^n}$, тогда

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{4n^2+2n}{(n+1)^2}\cdot|z|\cdot\frac{1+|z|^n}{1+|z|^{n+1}}\ .$$

Если $|z|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=4\,|z|$; если $|z|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=4$. Поэтому

при $|z|<¼$ ряд сходится абсолютно по признаку Даламбера. При $|z|>1$

ряд расходится – не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Пусть $|z| = 1/4$, тогда

$$\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^2(1+1/4^{n+1})\cdot 4}{(4n^2+2n)(1+1/4^n)} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+2n}\left(\frac{1+1/4^{n+1}}{1+1/4^n}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{6n+4}{4n^2+2n}\right)\left(1-\frac{3}{4^{n+1}+4}\right) = 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}+Q_n\cdot\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},\ \varepsilon > 0,\ |Q_n| < C\ (\text{const}).$$

По признаку Гаусса ряд сходится абсолютно при $|z| = 1/4$.

Итак, ряд сходится абсолютно при $|z| \le 1/4$, при $|z| > 1/4$ ряд расходится.

2.75. 2) При $z = n$, $n \in \mathbf{N}$, бесконечное произведение расходится. Пусть $z \ne n$, тогда

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n} = \left(1-\frac{z}{n}\right)\left[1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1-\frac{z^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ следует абсолютная сходимость данного бесконечного произведения.

Ответ: при $z = n$ бесконечное произведение расходится, при $z \ne n \in \mathbf{N}$ бесконечное произведение сходится абсолютно.

Глава 3

3.26. 15) Докажем сначала утверждения в задаче 3.26 9). По определению $\cos z$ имеем

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos x\ \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i\sin x\ \frac{e^{-y}-e^{y}}{2}.$$

Следовательно, для $|\cos z|^2$ справедливы равенства:

$$|\cos z|^2 = \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^2 + \frac{\cos(2x)-1}{2} = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x,$$

$$|\cos z|^2 = \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2 + \frac{\cos(2x)+1}{2} = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x.$$

Аналогично, для $\sin z$ получим равенства

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x,\ |\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$$

Поэтому из первого равенства для $|\cos z|^2$ вытекает неравенство $|\cos z|^2 \le \operatorname{ch}^2 y$, а из второго – неравенство $|\cos z|^2 \ge \operatorname{sh}^2 y$. Аналогичным образом для $|\sin z|$ получим неравенства $|\sin z|^2 \ge \operatorname{sh}^2 y$, $|\sin z|^2 \le \operatorname{ch}^2 y$.

Отметим, что равенства в этих неравенствах возможны только для $z = \pi k + iy$ или $z = \pi/2 + \pi k + iy$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.28. 12) Докажем прежде всего утверждения в задаче 3.28. 8). По определению $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ имеем

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos y + i\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin y,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cos y + i\frac{e^x + e^{-x}}{2}\sin y.$$

Поэтому имеем следующие равенства:

$$|\operatorname{ch} z|^2 = (e^{2x} + e^{-2x})/4 + (\cos 2y)/2 = (\operatorname{ch} x)^2 - \sin^2 y = (\operatorname{sh} x)^2 + \cos^2 y;$$

$$|\operatorname{sh} z|^2 = (e^{2x} + e^{-2x})/4 - (\cos 2y)/2 = (\operatorname{ch} x)^2 - \cos^2 y = (\operatorname{sh} x)^2 + \sin^2 y.$$

Из этих равенств сразу же вытекает, что

$$(\operatorname{sh} x)^2 \le |\operatorname{ch} z|^2 \le (\operatorname{ch} x)^2;\ \ (\operatorname{sh} x)^2 \le |\operatorname{sh} z|^2 \le (\operatorname{ch} x)^2.$$

А это и есть требуемые неравенства. Отметим также, что знак равенства в этих неравенствах возможен только при $z = x + ik\pi$ или при $z = x + i(\pi/2 + k\pi)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

3.34. Поскольку в указанной области функция $f(z) = e^{-1/z}$ является суперпозицией непрерывных функций, то для любого α исходная функция непрерывна. Для исследования равномерной непрерывности указанной функции сделаем замену переменной: $\zeta = -1/z$. В этом случае $|\zeta| = 1/|z|$ и $\arg\zeta = \pi - \arg z$. Поэтому исходная задача сводится к изучению равномерной непрерывности функции $g(\zeta) = e^\zeta$ в области $D = \{\zeta\colon R < |\zeta| < \infty, |\arg\zeta| > \pi - \alpha\}$. Для установления равномерной непрерывности функции $g(\zeta) = e^\zeta$ достаточно проверить наличие конечного предела $\lim\limits_{\zeta\to\infty} e^\zeta$ при $\zeta \in D$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда $e^\zeta = e^\xi(\cos(\arg\zeta) + i\sin(\arg\zeta))$, $|\arg\zeta| > \pi - \alpha$. Наличие конечного предела функции e^ζ на бесконечности будет иметь место только тогда, когда $\xi \to -\infty$. Но это возможно только для случая, когда $|\arg\zeta| \ge \pi/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, исходная функция $e^{-1/z}$ будет равномерно непрерывна в указанной области для $\alpha \le \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

3.39. Пусть $0 < \rho < \pi/2$. Обозначим $D_\rho = \mathbf{C} \setminus \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} \{z\colon |z - n\pi| < \rho\}$.

Докажем первое из этих неравенств. Пусть $z = x + iy$ и $z \in D_\rho$. Это значит, что для любого $n \in \mathbf{Z}$ $|z - n\pi| \ge \rho$, т. е. $(x - n\pi)^2 + y^2 \ge \rho^2$. Пусть $\tilde{x} = x - n\pi$. Тогда одно из равенств задачи 3.26 9) перепишется следующим образом:

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2\tilde{x},\ \ y^2 + \tilde{x}^2 \ge \rho^2.$$

Минимальное значение правой части последнего равенства будет достигаться в случае, когда $y = 0$, а x находится в пределах $(n-1)\pi + \rho \le x \le n\pi - \rho$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$. Это означает, что $\rho \le |\tilde{x}| \le \pi - \rho$. Таким образом, имеем цепочку неравенств для $z \in D_\rho$

$$|\sin z|^2 \geq \sin^2 \tilde{x} \geq \sin^2\rho,$$

что и требовалось доказать.

3.45. Поскольку для $|\alpha| < 1$ и $|z| \leq 1$ величина $1-\overline{\alpha}\cdot z \neq 0$, то исходная рациональная функция является непрерывной, как суперпозиция непрерывных функций. Далее, из равенства $w=(z-\alpha)/(\overline{\alpha}\cdot z-1)$ вытекает равенство $z=\dfrac{\alpha-w}{1-\overline{\alpha}\cdot w}$, что означает, что исходная функция осуществляет взаимно-однозначное соответствие. Осталось доказать, что $|w| \leq 1$, т. е. что исходное отображение не выводит из единичного круга. Пусть $z = x + iy$, $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$. В таком случае неравенство $|w| \leq 1$ эквивалентно неравенству

$$\frac{(x-\alpha_1)^2+(y-\alpha_2)^2}{(\alpha_1 x+\alpha_2 y-1)^2+(\alpha_1 y-\alpha_2 x)^2}\leq 1$$

или неравенству

$$x^2 + y^2 + |\alpha|^2 \leq |\alpha|^2(x^2 + y^2) + 1,$$

которое для $|\alpha| < 1$ эквивалентно неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$, что и требовалось доказать.

Глава 4

4.11. 1). Проверим необходимое условие сходимости ряда: общий член ряда должен стремиться к нулю. Так как $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y+\sin^2 x}$ (см. задачу 3.26), $z = x + iy$, то $\left|\dfrac{\sin nz}{n}\right|=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 ny+\sin^2 nx}}{n}$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(\sin nz)/n\right|=0$ только в случае $y = 0$. При $y = 0$ общий член ряда имеет вид $\sin(nx)/n$. Применяя признак Дирихле, получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ сходится для любого $x\in\mathbf{R}$. Итак, ответ: множеством сходимости является $\operatorname{Im} z = 0$

4.18. Пусть

$$f_n(z)=\frac{a(a+1)...[a+(n-1)]\,b\,(b+1)...[b+(n-1)]\,z^n}{n!\,c\,(c+1)...[c+(n-1)]}.$$

Тогда

$$\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)}\cdot\frac{z}{(n+1)}\right|=\frac{|z|}{n+1}\cdot\left|\frac{(b+n)(a+n)}{c+n}\right|.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = z$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно при $|z| < 1$; при $|z| > 1$ ряд расходится.

Рассмотрим единичную окружность $|z| = 1$. На этом множестве

$$\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = (n+1)\left|\frac{c+n}{(b+n)(a+n)}\right|.$$

Преобразуем выражение $\dfrac{(n+1)(c+n)}{(b+n)(a+n)}$:

$$\frac{(n+1)(c+n)}{(b+n)(a+n)} = \left(1+\frac{c}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \left[1+\frac{c+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{b+a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1+\frac{c+1-a-b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Итак,

$$\left|\frac{f_n(z)}{f_{n+1}(z)}\right| = \left|1+\frac{c+1-(a+b)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(1+\operatorname{Re}\frac{(c+1)-(a+b)}{n}+i\operatorname{Im}\frac{(c+1)-(a+b)}{n}\right)\right| =$$

$$= \left[\left(1+\operatorname{Re}\frac{(c+1)-(a+b)}{n}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\frac{(c+1)-(a+b)}{n}\right)^2\right]^{1/2}+o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1+\operatorname{Re}\frac{(c+1)-(a+b)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

По признаку Гаусса для знакопеременных рядов следует, что абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ на множестве $|z| = 1$ будет только при $\operatorname{Re}\big((c+1)-(a+b)\big) > 1$ или $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$ – тем самым задача решена.

4.25. Пусть $f_n(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^n}$, тогда $\sqrt[n]{|f_n(z)|} = \dfrac{|z|^{2/n}}{|1+z^2|}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} = \dfrac{1}{|1+z^2|}$. Положим $z = re^{i\varphi}$ по условию $|\varphi| \le \pi/4$ и $|1+z^2|^2 = (1 + r2\cos 2\varphi)^2 + r^4\sin 2\varphi = 1 + r^4 + 2r^2\cos 2\varphi \ge 1 + r^4 > 1$, если $z \ne 0$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно на множестве $\{z: |\arg z| \le \pi/4\}$. Покажем, что на этом множестве нет равномерной сходимости. Рассмотрим

$S(z)-S_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)=z^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(1+z^2)^k}=\frac{1}{(1+z^2)^k}$, $z\neq 0$, $S(0)-S_n(0)=0$

и сформулируем контр-условие к критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда:

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall N\ \exists n\geq N,\ \exists z\in\mathbf{Z}\colon |S(z)-S_n(z)|\geq\varepsilon.$$

Взяв в качестве $\varepsilon=1/2e$, $z_n=1/\sqrt{n}$, будем иметь

$$\left|S\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-S_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\frac{1}{(1+1/n)^n}>\frac{1}{2e},\ \forall n\geq n_0.$$

4.33. б) Пусть $f_n(z)=n^n e^{n^2 z}$, тогда $|f_n(z)|=n^n e^{n^2\operatorname{Re}z}$. Рассмотрим замкнутую область $\operatorname{Re}z<-\delta$, $\delta>0$. В этой области $|f_n(z)|\leq n^n e^{-n^2\delta}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{-n^2\delta}$ сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в замкнутой области $\operatorname{Re}z\leq-\delta$ по признаку Вейерштрасса. А так как каждый член $f_n(z)$ ряда является непрерывной функцией, то и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – непрерывная функция в области $\operatorname{Re}z<-\delta$ для любого $\delta>0$. Отсюда следует, что сумма ряда является непрерывной функцией в области $\operatorname{Re}z<0$.

4.45. Пусть $f_n(z)=\frac{(-1)^{n+1}}{e^{z\ln n}}$, тогда $|f_n(z)|=\frac{1}{e^{(\ln n)\operatorname{Re}z}}=\frac{1}{n^{\operatorname{Re}z}}$. В области $\operatorname{Re}z>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\operatorname{Re}z}}$ сходится, поэтому сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ и произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{e^{z\ln n}}\right)$ сходится абсолютно. Рассмотрим область $\operatorname{Re}z>1/2$. Покажем, что в этой области произведение сходится. Используя задачу 4.31, имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{z\ln n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-z\ln n}$. При $z=x>1/2$ этот ряд сходится, следовательно, он сходится и при $\operatorname{Re}z>1/2$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|^2$. Поэтому по задаче 2.66 бесконечное произведение также сходится.

Глава 5

5.1. 17) Имеем $u(x,y)=e^x$, $v(x,y)=e^y$. Проверим условия Коши–Римана $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$. Тогда $u'_x=e^x=v'_y=e^y$, $u'_y=0=v'_x$. Поэтому $x=y+2k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$.

Итак, ответ: точки дифференцируемости функции $f(z) = e^x + ie^y$ расположены на счетном числе прямых $x = y + 2k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$.

5.4. 1). Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Имеем $u(x, y) = \text{const}$. Тогда из условий Коши–Римана $v'_x(x.y) = 0$, $v'_y(x, y) = 0$, т. е. $v(x, y) = \text{const}$, поэтому $f(z)$ – константа в D.

5.22. 6) Запишем $f(z)=\dfrac{|z-a|}{|z-b|}=|g(z)|, g(z)=\dfrac{z-a}{z-b}=u+iv.$ Функция $g(z)$ аналитична всюду, кроме точки $z = b$. Имеем $f(z)=\sqrt{u^2+v^2}$.

Отсюда, так как $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{1}{2}(2uu_x'+2vv_x'-iuu_y'-ivv_y').$$

Используем условия Коши–Римана для функции $g(z)$: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{|z-b|}{|z-a|}[u(u_x'+iv_x')-iv(u_x'+iv_x')]=\frac{1}{2}\frac{|z-b|}{|z-a|}(u-iv)g_z'=$$

$$\frac{1}{2}\frac{|z-b|}{|z-a|}\left(\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}\right)\frac{a-b}{|z-b|^2}=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{|z-b|}{|z-a|}\cdot\frac{|z-a|^2}{(z-b)|z-b|^2}\cdot\frac{1}{(z-a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{|z-b|}{|z-a|}\cdot\frac{(a-b)}{(z-a)(z-b)}.$$

5.25. 1) По определению $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Пусть $e^{iz}=t$, $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\omega$.

Тогда имеем уравнение $t^2 - 2t\omega + 1 = 0$, поэтому $t=\omega+\sqrt{\omega^2-1}$, где $\sqrt{\omega^2-1}$ имеет два значения как многозначная функция; тогда $iz = \ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})$, где $\ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})$ – многозначная функция, обратная к e^{iz}.

Окончательно: $z=\dfrac{1}{i}\ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})=\arccos\omega$ – многозначная функция, обратная к функции $\cos z$.

Глава 6

6.6. Поскольку $|z| = 1$, то исходный интеграл эквивалентен следующему интегралу:

$$i\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-1|\,e^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,e^{i\theta}\,d\theta=$$

$$=i\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\,d\theta-\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=iI_1-I_2.$$

Так как $2\sin(\theta/2)\cos\theta=\sin(3\theta/2)-\sin(\theta/2)$, а $2\sin(\theta/2)\sin\theta=\cos(\theta/2)-\cos(3\theta/2)$, то интегралы I_1 и I_2 равны соответственно

$$I_1=\left(-\frac{\cos(3\theta/2)}{3/2}+\frac{\cos(\theta/2)}{1/2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2/3-2+2/3-2=-8/3,$$

$$I_2=\left(\frac{\sin(\theta/2)}{1/2}-\frac{\sin(3\theta/2)}{3/2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

Следовательно, исходный интеграл равен $-\frac{8}{3}i$.

6.27. Пусть z_1 и $z_2\in D$. Тогда в силу выпуклости области D отрезок, соединяющий z_1 и z_2, целиком лежит в области D. А в силу аналитичности $f(z)$ интеграл $\int_{z_1}^{z_2}f(z)\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки z_1 и z_2 и лежащего в D. Поэтому мы можем предположить, что интегрирование ведется вдоль отрезка $\overline{z_1z_2}$. В таком случае для $f(z)=u+iv$ имеем

$$\left|\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz\right|^2=\left|\int_{z_1}^{z_2}(u+iv)d(x+iy)\right|^2=\left|\int_{z_1}^{z_2}udx-vdy+i\int_{z_1}^{z_2}vdx+udy\right|^2=$$

$$\left(\int_{z_1}^{z_2}udx\right)^2+\left(\int_{z_1}^{z_2}vdx\right)^2+\left(\int_{z_1}^{z_2}vdy\right)^2+\left(\int_{z_1}^{z_2}udy\right)^2\ge\left(\int_{z_1}^{z_2}udx\right)^2+\left(\int_{z_1}^{z_2}udy\right)^2\ge$$

$$M^2\left[\left(\int_{z_1}^{z_2}dx\right)^2+\left(\int_{z_1}^{z_2}dy\right)^2\right]=M^2|z_1-z_2|^2.$$

Таким образом, для аналитической в области D функции исходное неравенство доказано. Если теперь предположить лишь непрерывность исходной функции, то можно построить пример (постройте его сами), показывающий, что неравенство перестает быть верным.

6.34. 4) Для доказательства аналитичности функции $f(z)$ в области $\operatorname{Re} z>0$ достаточно проверить, что в каждой точке z_0, $\operatorname{Re} z_0>0$, существует производная $f'(z_0)$. Пусть $h\in\mathbf{C}$ и $h\neq 0$, тогда

$(f(z_0+h)-f(z_0))/h=$

$$=\frac{1}{h}\int_0^{\infty}\left[\frac{t\sin t}{t^2+(z_0+h)^2}-\frac{t\sin t}{t^2+z_0^2}\right]dt=-\int_0^{\infty}\frac{(2z_0+h)\,t\sin t}{\left(t^2+(z_0+h)^2\right)(t^2+z_0^2)}\,dt.$$

Существование производной $f'(z_0)$ будет доказано, если мы докажем, что можно переходить к пределу при $h \to 0$ под знаком интеграла. Для этого достаточно доказать, что последний интеграл сходится равномерно для всех h, $0 < |h| < \delta$, где δ достаточно мало. Учитывая малость δ и тот факт, что $\operatorname{Re} z_0 > 0$, получим следующую оценку сверху для последнего интеграла:

$$(2|z_0|+\delta)\int_0^\infty \frac{t\,dt}{\left(|t^2+z_0^2|-2|z_0|\delta-\delta^2\right)(|t^2+z_0^2|)} \le \frac{2|z_0|+\delta}{2}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+z_0^2)^2},$$

что и означает равномерную сходимость нужного интеграла. Следовательно, производная $f'(z_0)$ существует и равна

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = -2z_0\int_0^\infty \frac{t\sin t}{(t^2+z_0^2)^2}\,dt\,.$$

6.40. 3) В силу теоремы Морера и результата решения задачи 6.39, для доказательства того, что данная функция $f(z)$ не имеет первообразной в указанной области, достаточно построить замкнутую кривую, лежащую в данной области, для которой интеграл не обращается в нуль.

Рассмотрим кривую $\gamma = \{z\colon\ |z| = \varepsilon\}$. Тогда

$$\oint_\gamma \frac{1}{\sin z}\,dz = i\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{\sin(\varepsilon e^{i\theta})}.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \to +0$ последний интеграл стремится к $2\pi i$. Это означает, что не выполнены условия, сформулированные в задаче 6.39, т. е. первообразной в этом случае нет.

6.61. Пусть $a > 0$ и пусть $k > 0$. Поскольку $f(x) = \dfrac{x\sin ax}{x^2+k^2}$ является четной функцией, то исходный интеграл равен

$$\frac{1}{2}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}\,dx,$$

который сходится по признаку Дирихле–Абеля. Далее, рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}$ комплексного переменного z в области $D_{R,\varepsilon} = \{z\colon |z| < R,\ \operatorname{Im} z \ge 0\} \setminus \{z\colon |z - ik| < \varepsilon\}$. По теореме Коши для многосвязной области имеем, что $\oint_{\partial D_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$. Интеграл по границе $\partial D_{R,\varepsilon}$ представим в виде суммы трех интегралов:

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{iax}\,dx}{x^2+k^2} + \oint_{|z-ik|=\varepsilon}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2} + \int_{\Gamma_R^+}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2} = i\int_{-R}^{R}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}\,dx + I_\varepsilon + I_R.$$

Интеграл $I_R \to 0$ при $R \to +\infty$ по лемме Жордана (см. 6.48). Интеграл I_ε по окружности $|z - ik| = \varepsilon$ равен

$$I_\varepsilon = -i\int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon e^{i\theta} + ik)\exp\left(ia(\varepsilon e^{i\theta} + ik)\right)e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i2\theta} + 2ike^{i\theta}}d\theta.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \to +0$ интеграл I_ε стремится к величине $-i\pi e^{-ak}$. Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2 + k^2}dx = \frac{1}{2}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin ax}{x^2 + k^2}dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ak}.$$

Но при $a > 0$ и $k = 0$ исходный интеграл есть интеграл Дирихле:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, формула в задаче 6.61 справедлива при всех $a > 0$ и $k \geq 0$.

6.66. Преобразованием Фурье $\hat{f}(\xi)$ функции $f(x)$ называется интеграл

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

Легко видеть, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ исходной функции может быть представлено в виде:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2a)^2}\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла рассмотрим функцию комплексого переменного $f(z) = e^{-az^2}$, $a > 0$, в прямоугольной области на комплексной плоскости: $D_{R,\xi} = [-R, R]\times[0, \xi/2a]$ для $\xi > 0$ и $D_{R,\xi} = [-R, R] \times [\xi/2a, 0]$ для $\xi < 0$. Рассмотрим только первый случай – второй рассматривается аналогично.

По теореме Коши интеграл по границе области равен нулю:

$$\oint_{\partial D_{R,\xi}} e^{-az^2}\,dz = 0.$$

С другой стороны, этот же интеграл может быть представлен в виде суммы четырех интегралов:

$$\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx + i\int_0^{\xi/2a} e^{-a(R+i\tau)^2}d\tau + \int_{+R}^{-R} e^{-a(x+i\xi/2a)^2}dx + i\int_{\xi/2a}^{0} e^{-a(-R+i\tau)^2}d\tau =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Легко видеть, что при $R \to +\infty$ интегралы I_2 и I_4 стремятся к нулю. Поэтому можно получить равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2a)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx.$$

Интеграл в правой части последнего равенства вычисляется следующим образом. Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = I$. Тогда, применяя теорему Фубини, получим равенство

$$I^2 = \int_{R^2} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\infty} e^{-ar^2}rdr\int_0^{2\pi}d\theta = \pi\int_0^{\infty}e^{-a\eta}d\eta = \frac{\pi}{a}.$$

Поэтому имеем $I = \sqrt{\pi/a}$. Следовательно, преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$ равно $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\xi^2/4a}$, что и требовалось доказать. Сравнить с задачей 6.49.

Глава 7

7.8. Найдем нули знаменателя функции $f(z) = 1/(1+z^4)$:

$$z = \sqrt[4]{-1} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть $z_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_4 = \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Внутри контура γ лежит только точка z_2, поэтому

$$\oint_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = \oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{2\pi i}{(-i\sqrt{2})(-\sqrt{2})(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = -\frac{\pi i}{i(1+i)\sqrt{2}} = \frac{-\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}.$$

7.20. Пусть точка $z \notin \overline{D}$. Возьмем окружность достаточно большого радиуса R с центром в точке z, так, чтобы данный контур γ и точка z лежали внутри этой окружности. Тогда по теореме Коши будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma-z|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma.$$

Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma - z|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$. Сделаем замену переменного $\varsigma - z = Re^{i\varphi}$. Тогда $d\varsigma = Rie^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma - z|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}}iRe^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ и условия $\lim\limits_{z\to\infty}f(z) = A$ имеем

$\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi = A$, поэтому $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = A - f(z)$.

В случае, когда точка $z\in D$, по теореме Коши имеем $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma - z|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$. Интеграл слева не зависит от R, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma - z|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = A,$$

что и требовалось доказать.

7.24. Пусть $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, тогда

$$\iint\limits_{r\le|z|\le R}f(z)dxdy = \iint\limits_{r\le|z|\le R}u(x,y)dxdy + i\iint\limits_{r\le|z|\le R}v(x,y)dxdy.$$

Сделаем замену переменных: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда

$$\iint\limits_{r\le|z|\le R}f(z)dxdy = \int_r^R d\rho\int_0^{2\pi}u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi\ +$$

$$+\,i\int_r^R d\rho\int_0^{2\pi}v(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi.$$

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – гармонические функции в круге $|z| < R$, то по теореме о среднем для гармонических функций имеем

$$\int_0^{2\pi}u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi = 2\pi u(0,0);\quad \int_0^{2\pi}v(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi = 2\pi v(0,0),$$

тем самым

$$\iint\limits_{r\le|z|\le R}f(z)dxdy = 2\pi u(0,0)\int_r^R\rho d\rho + 2\pi i v(0,0)\int_r^R\rho d\rho = f(0)\pi(R^2 - r^2).$$

7.53. 2) Преобразуем интеграл

$$\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\cdot\frac{dt}{t-z}=\int_0^1 \ln(1-t)\frac{dt}{t-z}-\int_0^1 \ln t\frac{dt}{t-z}.$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $1-t=y$, тогда $t=1-y$, $dt=-dy$ и $\int_0^1 \ln(1-t)\cdot\frac{dt}{t-z}=\int_0^1\frac{\ln y\,dy}{1-y-z}=-\int_0^1\frac{\ln y\,dy}{y-(1-z)}$. Пусть интеграл $\int\limits_0^1 \ln t\frac{dt}{t-z}=F(z)$, тогда искомый интеграл есть:

$$\int\limits_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\cdot\frac{dt}{t-z}=-F(1-z)-F(z).$$

Функция $F(z)$ как интеграл типа Коши есть аналитическая функция вне отрезка $[0, 1]$. Вычислим интеграл при достаточно больших по модулю z, тогда по теореме единственности аналитических функций интеграл будет вычислен для всех $z\notin[0, 1]$. Разложим ядро интеграла $\int\limits_0^1 \ln t\frac{dt}{t-z}$, т. е. $\frac{1}{t-z}$, в ряд по степеням t/z, равномерно сходящийся на отрезке $[0, 1]$: $\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z(1-t/z)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^n$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \ln t\frac{dt}{t-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_0^1(\ln t)t^n dt.$$

Так как $\int\limits_0^1(\ln t)t^n dt=\frac{t^{n-1}}{n+1}\ln t\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt=-\frac{1}{(n+1)^2}$, то получаем $\int\limits_0^1 \ln t\frac{dt}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2 z^{n+1}}=F(z)$ – ряд сходится, так как рассматриваем точки z, модуль которых достаточно большой. Имеем:

$$F'(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,z^{n+2}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)z^{n+1}}=\frac{1}{z}\ln(1-1/z),$$

$$F_z'(1-z)=-\frac{1}{1-z}\ln\left(1-\frac{1}{1-z}\right).\text{ Итак,}$$

$$\left(\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\cdot\frac{dt}{t-z}\right)_z'=\frac{1}{z(z-1)}\ln\left(\frac{z-1}{z}\right),\ \int\limits_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\cdot\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{z}{z-1}\right)^2.$$

Глава 8

8.2. 10) Радиус сходимости $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos(in)|}}$. Так как $\cos(in) = (e^{-n}+e^{n})/2$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos(in)|} = e$, $R = 1/e$.

8.7. 3) Так как радиус сходимости ряда $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = 1$, то функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-1}z^{2n+1}$ аналитична в круге $|z| < 1$, а ее производная равна

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1/(1-z^2),\ |z|<1.$$

Тем самым $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z} + C$, но $f(0)=0$, поэтому окончательно $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$, $|z| < 1$.

8.18. 4) Так как функция $f(z)$ имеет две особые точки a и b, то радус сходимости ряда равен $R = \min(|a-i|, |b-i|)$, область сходимости есть $|z-i| < R$. Проведем разложение:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-i-(a-i)} - \frac{1}{z-i-(b-i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{i-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{a-i}\right)^n - \frac{1}{i-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{b-i}\right)^n\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{(a-i)^{n+1}} - \frac{1}{(b-i)^{n+1}}\right](z-i)^n,\ |z-i| < R,\ R = \min(|a-i|, |b-i|).$$

8.54. 2) Данный ряд сходится равномерно на любом компакте комплексной плоскости, поэтому $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}|z|(n^2+|z|^2)^{-1}$ есть непрерывная функция на всей комплексной плоскости, но так как $\operatorname{Im} f(z) \equiv 0$, то функция $f(z)$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости. Напомним, что функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, если она аналитична в некоторой окрестности точки z_0.

Глава 9

9.7. По теореме Лорана в данном кольце функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Если в ряде Лорана все коэффициенты a_k при степенях $k = -1, -2, \dots$ равны нулю, то в этом случае существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = a_0$ и, следовательно, точка a является устранимой особой точкой (см. 9.1). Но это противоречит условию отсутствия конечного предела. Аналогично, если в ряде Лорана имеется лишь конечное число коэффициентов a_k при степенях $k = -1, -2,\ldots$, отличных от нуля, то в этом случае $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, т. е. точка a является полюсом (см. 9.3). Но этого также не может быть в силу условий задачи. Таким образом, существует бесконечно много коэффициентов a_k при степенях $k = -1, -2,\ldots$, отличных от нуля. А это значит (см. определение), что точка a является существенно особой точкой функции $f(z)$.

9.17. 1) Функция cos ξ является целой, поэтому $\cos\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ для всех ξ, $|\xi| < \infty$. Следовательно, функция cos(1/z) для всех z, $0 < |z| < \infty$, представима в виде $\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{0} a_{-k} z^k$. Это значит, что функция cos(1/z) имеет правильную часть ряда Лорана $a_0 = 1$ и главную часть ряда Лорана $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_{-k} z^k$. Таким образом, функция cos(1/z) допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки z = 0.

7) Решим уравнение sin z = 5. Оно эквивалентно уравнению

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0.$$

Решив его как квадратное уравнение относительно e^{iz}, получим

$$e^{iz} = (5+2\sqrt{6})i, \quad e^{iz} = (5-2\sqrt{6})i.$$

Отсюда вытекает, что существует две последовательности точек

$$z_n' = -i\ln(5+2\sqrt{6}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ n \in \mathbf{Z},$$

$$z_n'' = -i\ln(5-2\sqrt{6}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ n \in \mathbf{Z},$$

каждая из которых есть решение уравнения sin z = 5. Кроме того, все указанные точки являются полюсами первого порядка функции 1/(sin z – 5) и $|z_n'|, |z_n''| \to +\infty$ при $n \to \pm\infty$. Следовательно, точка z = ∞ не является изолированной особой точкой функции 1/(sin z – 5), т. е. эта функция не допускает разложения в ряд Лорана в точке z = ∞.

9.19. В силу формул для коэффициентов ряда Лорана имеем:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $r \le \rho \le R$, так как ряд сходится в замкнутом кольце по условию задачи. Если положить $\rho = r$, то получим неравенство

$$|a_n| = \frac{r^{-n}}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta\right| \le r^{-n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| = r^{-n} M_r.$$

Если же положить $\rho = R$, то аналогично получим неравенство

$$|a_n| \le R^{-n} M_R, \text{ где } M_R = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

Складывая эти два неравенства, получим

$$|a_n| \le \frac{1}{2}(r^{-n}M_r + R^{-n}M_R) \le M(r^{-n} + R^{-n}),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $M = \max(M_r, M_R)/2$, что и требовалось доказать.

9.25. 5) Исходная функция $f(z)$ при $|z| > 2$ может быть представлена в виде ряда

$$f(z) = \frac{1}{5z^2}\left(\frac{1}{1-1/z^2} - \frac{1}{1+4/z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5z^2}\left[\left(1 + 1/z^2 + 1/z^4 + \ldots\right) - \left(1 - 4/z^2 + 16/z^4 - 64/z^6 + \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5z^2}\left(5/z^2 - 15/z^4 + 65/z^6 - 255/z^8 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+4(-4)^n}{5} z^{-4-2n}$$

9) Данная функция $f(z)$ при $0 < |z| < 1$ может быть представлена в виде произведения двух рядов:

$$e^z\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z}\right) = e^z\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \ldots + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ z + z^2 + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{n+1}}{n!} + \ldots$$

$$+ \ldots + \ldots = \frac{1}{z} + 2 + (2 + \frac{1}{2!})z + (2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})z^2 + \ldots + (2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!})z^n =$$

$$= \frac{1}{z} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!})z^n.$$

9.37. Рассмотрим функцию $\varphi(z) \equiv (z-a)^m f(z)$. Тогда функция $\varphi(z)$ является ограниченной в некоторой окрестности точки a, поскольку $|\varphi(z)| = |z-a|^m |f(z)| < M$. Следовательно, точка a является устранимой особой точкой функции $\varphi(z)$ и существует конечный предел (см. 9.1 и 9.2) $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = b$. А это как раз и означает, что точка a является для функции $f(z)$ полюсом порядка не более, чем m.

Глава 10

10.3. 7) Так как $|f(z)| = e^{\operatorname{Re} P(z)}$, и при $|z| = r$ справедливо неравенство

$\operatorname{Re} P(z) \le |P(z)| \le |a_0|\, r^p + \ldots + |a_p| = r^p\left(|a_0| + \frac{|a_1|}{r} + \ldots + \frac{|a_p|}{r^p}\right) < r^p(|a_0| + \varepsilon)$,

$r > R(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то

$$|f(z)| < \exp\left(r^p(|a_0| + \varepsilon\right),\ r > R(\varepsilon). \tag{1}$$

Пусть $\arg a_0 = \alpha$; на луче $\arg z = -\alpha/p$ имеем оценку

$$\operatorname{Re} P(z) = |a_0|\, r^p + \operatorname{Re}\left(a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p\right) \ge |a_0|\, r^p - |a_1 z|^{p-1} + \ldots + a_p| \ge$$

$$\ge |a_0|\, r^p - (|a_1| r^{p-1} + \ldots + |a_p|) = r^p\left(|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \ldots - \frac{|a_p|}{r^p}\right) > r^p(|a_0| - \varepsilon),$$

$r > R_1(\varepsilon)$. Тем самым

$$|f(z)| > \exp\left(r^p(|a_0| - \varepsilon)\right),\ r > R_1(\varepsilon),\ \arg z = -\frac{\alpha}{p}. \tag{2}$$

На основе неравенств (1) и (2) заключаем, что порядок $\rho = p$, тип $\sigma = |a_0|$.

10.12. 5) Коэффициент $a_n = \left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)^{n/\alpha}$, поэтому радиус сходимости ряда $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$, и функции $f(z)$, тем самым, – целая. Используя формулу для вычисления порядка $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n \ln n}{\ln|1/a_n|}$, получим

$\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n \ln n}{(n/\alpha)\ln[n \ln n]|} = \alpha.$ Так как порядок $\rho = \alpha > 0$, то тип вычисляем по формуле $(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Имеем:

$$(\sigma e \alpha)^{1/\alpha} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{1/\alpha} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{n/\alpha}}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{(n \ln n)^{1/\alpha}} = 0.$$

Итак, порядок $\rho = \alpha$, тип $\sigma = 0$.

10.21. 1) Для функции $f(z) = \sin z$ порядок $\rho = 1$, тип $\sigma = 1$. Ее нули: $z_k = \pm k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Произведение множителей, соответствующих нулям $k\pi$ и $-k\pi$, равно $\left(1 - \dfrac{z}{k\pi}\right) e^{z/k\pi} \left(1 + \dfrac{z}{k\pi}\right) e^{-z/k\pi} = \left(1 - \dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Поэтому

$\sin z = z e^{az+b} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Функция $\frac{\sin z}{z} = e^{az+b} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ – целая, при z = 0 получаем $1 = e^b$ и $\sin z = z e^{az} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Функция sin (z) – нечетная, поэтому $e^{az} = e^{-az}$ для любого $z \in \mathbf{C}$, поэтому a = 0. Окончательно получаем разложение

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbf{C}.$$

10.38. 1) Так как

$$f(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^n,\ z\in\mathbf{C},\ \text{ то }\ \gamma(t) = A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{t^{k+1}} = \frac{A}{t-a}.$$

10.51. 1) Первый способ решения. Так как для функции e^z функция, ассоциированная по Борелю, есть $\gamma(t) = 1/(t-1)$, то сопряженная диаграмма $\overline{D} = \{1\}$. Опорная функция к $\overline{D}$ есть функция $K(\varphi) = \cos\varphi = K(-\varphi)$. Поэтому индикатриса роста $h(\varphi) = K(-\varphi) = \cos\varphi$.

Второй способ решения. По определению, индикатриса роста функции $f(z)$ вычисляется по формуле

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(r\,e^{i\varphi})|}{r},\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Для функции $f(z)= e^z$, $z = r\,e^{i\varphi}$ имеем

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln|e^{re^{i\varphi}}|}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln e^{r\cos\varphi}}{r} = \cos\varphi.$$

10.66. 1) Так как общий член ряда

$$a_n(z) = e^{-n^2}\cdot e^{n^2\sqrt{n}z},\ z = x+iy,\ \text{ то }\ |a_n(z)| = e^{-n^2+xn^2\sqrt{n}}.$$

Необходимое условие сходимости ряда – это $a_n(z) \to 0$, поэтому при $x > 0$ ряд расходится. Если $x \le 0$, то данный ряд сходится абсолютно. Итак, ряд сходится на замкнутой полуплоскости Re $z \le 0$.

10.72. 5) Запишем данный ряд в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, где $a_n = (-1)^n/n$, $\lambda_n = \ln n$. Пусть $z = x + iy$. Рассмотрим действительное значение $z = x$, тогда $a_n e^{-\lambda_n z} = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{n^x}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n^x}$ сходится при $x > -1$ и расходится при $x \le -1$, поэтому абсцисса сходимости $c = -1$. Так как при $x \ge -1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ряд сходится равномерно, а при $x < -1 - \varepsilon$ ряд расходится, то абсцисса равномерной сходимости $r = -1$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. При $x = 0$ имеем $\left|a_n e^{-\lambda_n z}\right| = \frac{1}{n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а при $x > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n e^{-\lambda_n z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n^x}$ сходится, то абсцисса абсолютной сходимости $a = 0$.

Итак, $c = r = -1$, $a = 0$.

Глава 11

11.2. 1) Радиус сходимости R ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ равен 1. Внутри круга $|z| < 1$ сумма $f(z)$ этого ряда есть аналитическая функция. Предположим, что точка $z = 1$ есть правильная точка. Тогда существует функция $F(z)$, аналитическая в ε-окрестности $U_\varepsilon(1)$ точки $z = 1$, такая, что $F(z) = f(z)$, $z \in \{|z| < 1 \cap U_\varepsilon(1)\}$. Так как при $0 < r < 1$ функция $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n}$, то $f(r)\to+\infty$ при $r\to 1-0$. Следовательно, точка $z = 1$ есть особая точка на границе круга сходимости. Покажем, что точка $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{m\pi}{2^{k-1}}$, $0 < m < 2^k$, $m, k \in \mathbf{N}$, есть особая точка на границе круга $|z| = 1$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$. Имеем

$$f(re^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} e^{ir^n m\pi/2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}} + i\sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}},$$

$$\operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{k} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{k} r^{2^n}\cos\frac{2^n m\pi}{2^{k-1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} r^{2^n}.$$

При фиксированном k и $r\to 1-0$ функция $g(r) = \sum_{n=k+1}^{\infty} r^{2^n} \to +\infty$. Отсюда следует, что точка $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = (m\pi)/2^{k-1}$, является особой. Так как множество точек $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = (m\pi)/2^{k-1}$, $0 < m < 2^k$, $m,k \in \mathbf{N}$, есть множество всюду плотное на единичной окружности $|z| = 1$, то граница круга сходимости состоит из особых точек данного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ и ряд не может быть продолжен за границу круга сходимости.

11.12. Данный ряд сходится в круге радиуса $R = 1$, т. е. в круге $|z-1| < 1$ функция $f(z)$ есть аналитическая функция. При $z = x$, $|x-1| < 1$, справедливо разложение $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^n/n$, $|x-1|<1$. С другой стороны, $\ln x = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n / n$, $|x-1|<1$. Следовательно, $f(z)$ есть аналитическое продолжение функции $\ln x$ с действительного интервала $(0, 2)$ в круг $|z-1|<1$.

11.57. Данная функция $\sqrt{z^2-1}$ является многозначной, но она допускает выделение однозначных ветвей в двух областях, например в $D_1 = \{z: |z|<1\}$, $D_2 = \{z: |z|>1\}$. Поэтому, если $x > 1$, то $f(x) = \sqrt{x^2-1}$. Если $z = x$, $x < -1$, то $f(x) = -\sqrt{x^2-1}$.

11.83. Так как область $|z| > 1$ не содержит точек ветвления $z = 0$, $z = 1$ функции $f(z)$ и допускает выделение однозначных ветвей, то по теореме Лорана любую однозначную ветвь функции $\sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$ можно разложить в ряд Лорана. Имеем: $\frac{z}{1-z} = -\frac{1}{1-1/z}$ и $\sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{1-1/z}}$. Так как $f(1/2) > 0$, то

$$\sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} = e^{i\pi/3}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/3} = e^{i\pi/3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right) =$$

$$= e^{i\pi/3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(1+3)\ldots(3n-2)}{n!3^n z^n}\right),\ |z|>1.$$

Глава 12

12.5. 1) Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$. По определению это означает, что функция $g(\xi) = f(1/\xi)$ аналитична в точке $\xi = 0$ и, следовательно, в окрестности точки $\xi = 0$ представима в виде ряда Тейлора $g(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$. Это равносильно тому, что функция $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ представима в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Поскольку $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$ равен коэффициенту a_1 с обратным знаком, а коэффициент a_1 может быть получен по формуле $a_1 = \lim\limits_{z\to\infty}(f(z)-a_0)z$, где $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \equiv f(\infty)$, то окончательно имеем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}(f(\infty)-f(z))z,$$

что и требовалось доказать.

2) Легко видеть, что $\lim\limits_{z\to\infty} z(f(z)-f(\infty)) = \lim\limits_{\xi\to 0}\frac{g(\xi)-g(0)}{\xi} = g'(0)$, где

$g(\xi) = f(1/\xi)$. Последний предел существует в силу аналитичности функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

12.10. 6) Предположим, что $a \neq b$. Пусть сначала $z = 0$. Поскольку

$$\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b} = \ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i\arg\left[\frac{z-a}{z-b}\right] + i2k\pi,$$

то, зафиксировав $k \in \mathbf{Z}$, получим однозначную ветвь исходной многозначной функции. Будем в дальнейшем символом $f_k(z)$ обозначать ветвь $z^n\left(\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}\right)_k$.

1) Пусть $n \geq 0$. Тогда $f_k(z)$ будет аналитична в точке $z = 0$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_k(z) = 0.$$

2) Пусть $n = -1$. В этом случае точка $z = 0$ есть полюс первого порядка функции $f_k(z)$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_k(z) = \lim_{z\to 0}(zf_k(z)) = \lim_{z\to 0}\left[\ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i\arg\frac{z-a}{z-b} + i2k\pi\right] =$$

$$= \ln\left|\frac{a}{b}\right| + i\arg\frac{a}{b} + i2k\pi = \left(\operatorname{Ln}\frac{a}{b}\right)_k.$$

3) Пусть $n \leq -2$. Тогда точка $z = 0$ есть полюс порядка $(-n)$ функции $f_k(z)$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_k(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(-n-1)!}\left(z^{-n}f_k(z)\right)^{(-n-1)} = \frac{1}{(-n-1)!}\left(Ln\frac{z-a}{z-b}\right)_k^{(-n-1)}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{(-n-1)!}(-n-2)!(-1)^{-n-2}\left[\frac{1}{(-a)^{-n-1}} - \frac{1}{(-b)^{-n-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{n+1}.$$

Предположим теперь, что $z = \infty$. Вместо функции $f_k(z)$ рассмотрим функцию $g_k(z) = f_k(1/z)$ (см. 12.5), которая будет иметь вид

$$g_k(z) = z^{-n}\left(\operatorname{Ln}\frac{za-1}{zb-1}\right)_k.$$

Будем изучать функцию $g_k(z)$ в точке $z = 0$ (см. 12.5).

1) Пусть $n \leq -2$. Вэтом случае $g_k(0) = \lim\limits_{z\to 0} g_k(z) = 0$ и

$$g_k'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{z^{-n}\left(\operatorname{Ln}\frac{za-1}{zb-1}\right)_k}{z} = 0.$$

Следовательно (см. 12.5. 2)), в этом случае $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f_k(z) = 0$.

2) Пусть $n = -1$. В этом случае по-прежнему $g_k(0) = 0$, но

$$g_k'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{z^n\left(\mathrm{Ln}\,\dfrac{za-1}{zb-1}\right)_k}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\ln\left|\frac{za-1}{zb-1}\right| + i\arg\frac{za-1}{zb-1} + i2k\pi\right] = i2k\pi.$$

Следовательно, (см. 12.5. 2)), в этом случае $\operatorname*{res}_{z=\infty} f_k(z) = -i2k\pi$.

3) Пусть $n = 0$. В этом случае $g_k(0) = (\mathrm{Ln}\,1)_k = i2k\pi$, поэтому

$$g_k'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\left(\mathrm{Ln}\,\dfrac{za-1}{zb-1}\right)_k - i2k\pi}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\ln\left|\dfrac{za-1}{zb-1}\right| + i\arg\dfrac{za-1}{zb-1}}{z} = b-a.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f_k(z) = a-b$.

4) Теперь пусть $n > 0$. В этом случае точка $z = 0$ есть полюс порядка n для любой ветви $g_k(z)$, за исключением $k = 0$. Рассмотрим ряд Лорана функции $g_k(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Поскольку $\operatorname*{res}_{z=\infty} f_k(z)$ есть коэффициент с обратным знаком при z в ряде Лорана функции $g_k(z)$, то необходимо получить ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции $\left(\mathrm{Ln}\,\dfrac{za-1}{zb-1}\right)_k$. При этом нас интересует только коэффициент этого ряда при z^{n+1}. Этот коэффициент, как известно, равен

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\mathrm{Ln}\,\frac{za-1}{zb-1}\right)_k^{(n+1)}(0) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{n!(-1)^n a^{n+1}}{(za-1)^{n+1}} - \frac{n!(-1)^n b^{n+1}}{(zb-1)^{n+1}}\right]_{z=0} =$$

$$= -\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}.$$

Поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f_k(z) = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}$. Задача полностью решена.

12.23. 1) Сначала пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = (1-e^{i\alpha z})/z^2$ в области

$$D_{R,\varepsilon} = \{z\colon |z| < R,\ \mathrm{Im}\,z \ge 0\} \setminus \{z\colon |z| < \varepsilon,\ \mathrm{Im}\,z \ge 0\}.$$

В указанной области функция $f(z)$ аналитична, поэтому по теореме Коши $\oint_{\partial D_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$. Этот интеграл по границе области представим в виде суммы

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}dx + \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\,z\ge 0}}\frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2}dz + \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}\,z\ge 0}}\frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2}dz = I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Интеграл I_3 оценивается следующим образом:

$$|I_3| \le \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\ge 0}} \left|\frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2}\right| |dz| \le \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\ge 0}} \frac{1+e^{-\alpha y}}{R^2} R\,d\theta \le \frac{2}{R}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{2\pi}{R},$$

где $y = \operatorname{Im} z$ и $\alpha > 0$. Следовательно, $I_3 \to 0$ при $R \to +\infty$.

Рассмотрим интеграл I_4:

$$I_4 = \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \operatorname{Im} z\ge 0}} \frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2}\,dz = \int_{\pi}^{0} \frac{1-\exp(i\alpha\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon^2 e^{i2\theta}}\,\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} \frac{\exp(i\alpha\varepsilon e^{i\theta}-1)}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле при $\varepsilon \to +0$ имеет предел, равный $i\alpha$. Поэтому $I_4 \to -\pi\alpha$ при $\varepsilon \to +0$. Устремляя $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ в остальных интегралах, получим равенство

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}\,dx = \pi\alpha.$$

Следует отметить, что этот же результат получится, если применить результат решения задачи 12.22.

В случае $\alpha < 0$, сделав замену переменной $x \to -x$, получим равенство

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}\,dx = v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i(-\alpha)x}}{x^2}\,dx = \pi(-\alpha),$$

поскольку $(-\alpha)$ будет величина положительная и можно применить результат предыдущего случая. Таким образом, окончательно имеем

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}\,dx = \pi|\alpha|, \alpha \in \mathbf{R}.$$

12.27. 6) Поскольку исходный интеграл равен $\operatorname{Re}\int_0^{\infty} \frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}\,dx,$ то рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}$ комплексного переменного z в комплексной плоскости с разрезом по положительной части действительной оси и с выколотой точкой z = 0. При этом в указанной области функция ln z однозначно определена и равна $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Рассмотрим замкнутый контур интегрирования

$$\Gamma_{R,\varepsilon} = \{z\colon |z| = R\} \cup \{z\colon |z| = \varepsilon\} \cup [\varepsilon, R] \cup [R, \varepsilon],$$

где указанные отрезки расположены на верхнем и нижнем берегах разреза. По формуле, приведенной во введении к данной главе (см. также 12.26), получим

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left\{\underset{z=i}{\mathrm{res}}\frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}+\underset{z=-i}{res}\frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}\right\} = 2\pi i\left\{\frac{e^{i\ln i}}{2i}-\frac{e^{i\ln(-i)}}{2i}\right\} =$$

$$= 2\pi i\left\{\frac{e^{i(i\arg i)}}{2i}-\frac{e^{i(i\arg(-i))}}{2i}\right\} = \pi\left\{e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}\right\}.$$

Интеграл по контуру $\Gamma_{R,\varepsilon}$ может быть представлен также в виде суммы

$$\int_{|z|=R}\frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx+\int_{R}^{\varepsilon}\frac{\exp(i\ln(xe^{i2\pi}))}{x^2+1}dx+\int_{|z|=\varepsilon}\frac{e^{i\ln z}}{z^2+1}dz = I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Докажем, что интегралы I_1 и I_4 стремятся к нулю при $R\to+\infty$ и $\varepsilon\to+0$ соответственно. Действительно,

$$|I_1|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{i(\ln R+i\theta)}}{R^2e^{i2\theta}+1}\right|R\,d\theta\le R\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\theta}d\theta}{R^2-1}\le\frac{R}{R^2-1}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0;$$

$$|I_4|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{i(\ln\varepsilon+i\theta)}}{\varepsilon^2e^{i2\theta}+1}\right|\varepsilon\,d\theta\le\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\theta}d\theta}{1-\varepsilon^2}\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}0.$$

Устремляя $R\to+\infty$ и $\varepsilon\to+0$ в остальных интегралах, получим равенство

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx-\int_0^{\infty}\frac{e^{i(\ln x+i2\pi)}}{x^2+1}dx=\pi(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}).$$

Итак, имеем:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{1-e^{-2\pi}}(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2})=\frac{\pi e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi/2}}(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2})=$$

$$=\frac{\pi e^{\pi}}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}=-\frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi}}{\mathrm{ch}(\pi/2)}.$$

12.29. 3) Сделав замену переменной $t = x^p$, исходный интеграл перепишем в виде

$$\frac{1}{p}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\cos t\,dt=\frac{1}{p}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{it}dt,\ \alpha=\frac{1}{p}.$$

Возьмем функцию $f(z) = z^{\alpha-1}e^{iz}$ комплексного переменного z в области

$$D_{R,\varepsilon} = \{z:\ |z|<R, \mathrm{Re}\,z\ge0, \mathrm{Im}\,z\ge0\}\setminus\{z:\ |z|<\varepsilon, \mathrm{Re}\,z\ge0\ \mathrm{Im}\,z\ge0\}.$$

В указанной области многозначная функция z^{α} определена однозначно по формуле $z^{\alpha} = e^{\alpha\ln z} = e^{\alpha\,[\ln|z|+i\arg z]}$, а функция $f(z)$ является аналитической. Поэтому по теореме Коши $\oint_{\partial D_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$. Этот интеграл представим в виде суммы четырех интегралов

$$\int_{\varepsilon}^{R} t^{\alpha-1} e^{it}\, dt + \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\ge 0, \operatorname{Re} z\ge 0}} z^{\alpha-1} e^{iz}\, dz + \int_{R}^{\varepsilon} (iy)^{\alpha-1} e^{i(iy)}\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon \\ \operatorname{Im} z\ge 0, \operatorname{Re} z\ge 0}} z^{\alpha-1} e^{iz}\, dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$, то применив лемму Жордана для интеграла I_2 и оценив непосредственно подынтегральную функцию в интеграле I_4, нетрудно получить, что $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2 = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} I_4 = 0$. Устремляя $R\to+\infty$ и $\varepsilon\to+0$ в других интегралах, получим равенство

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{it}\, dt = i^{\alpha-1} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dt = e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-1)}\, \Gamma(\alpha),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера. Итак, исходный интеграл равен

$$\int_0^{\infty} \cos(x^p)\, dx = \frac{1}{p} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{it}\, dt = \frac{1}{p} \operatorname{Re} e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-1)}\, \Gamma(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{p} \Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \sin\frac{\pi}{2p}.$$

Глава 13

13.5. Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$, состоящая из аналитических, однолистных функций сходится в области D к функции $f(z)$. По теореме Вейерштрасса функция $f(z)$ аналитична в области D. Предположим, что она не является тождественно константой. Докажем, что она является однолистной. Предположим противное, т. е. что существуют, по крайней мере, две такие точки $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, что $f(z_1) = f(z_2)$. Так как функция $f(z)$ не есть тождественная константа, то существует контур Γ, такой, что $z_1, z_2 \in \Gamma$ и $\overline{D_\Gamma} \subset D$, при этом на контуре Γ $f(z) \neq f(z_1) = f(z_2)$. Отсюда следует, что функция $g(z) = f(z) - f(z_1)$ имеет внутри области D_Γ, по крайней мере, два нуля, на границе Γ области D_Γ у функции $g(z)$ нет нулей. Тогда по теореме Гурвица (см., например, гл. 12) начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\Gamma)$ для всех $n > n_0(\Gamma)$ функции $g_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$ также имеют, по крайней мере, два нуля. Это противоречит условию однолистности последовательности $\{f_n(z)\}$. Следовательно, функция $f(z)$ однолистна.

Примером последовательности однолистных функций, равномерно сходящейся к функции, тождественно равной нулю, может служить последовательность $\{f_n(z) = z/n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \equiv 0$, $z \in \mathbf{C}$.

13.11. Название "теорема площадей" происходит от того, что эта теорема является аналитическим выражением следующего геометрического факта: при отображении области $|z| > r$, $r > 1$, функцией $\omega = \omega(z)$ остается непокрытой часть плоскости $\omega = u + iv$, площадь которой больше нуля. Из этого геометрического пояснения вытекает и способ доказательства. Именно, окружность $|z| = r$, $r > 1$, переходит при отображении $\omega = \omega(z) = u + iv$ в замкнутую аналитическую кривую $\omega = \omega(re^{i\varphi}) = \omega(\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, ограничивающую некоторую область, площадь S которой вычисляется по формуле (см. задачу 6.7. 1))

$$S = \int_0^{2\pi} u \cdot v' d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\omega(\varphi) + \overline{\omega(\varphi)}}{2} \cdot \frac{\omega'(\varphi) - \overline{\omega'(\varphi)}}{2i} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{re^{i\varphi} + re^{-i\varphi}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-ni\varphi} \cdot + \overline{a_n} e^{ni\varphi}}{2r^n} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{re^{i\varphi} + re^{-i\varphi}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n e^{-in\varphi} + n\overline{a_n} e^{in\varphi}}{2r^n} \right] d\varphi = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2.$$

При любом $r > 1$ площадь $S > 0$. Переходя к пределу при $r \to 1$, получаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \le 1$.

13.39.1. Пусть точка z_0 переходит в точку $w_0 = 0$, тогда $\overline{z}_0$ переходит в точку, симметричную с точкой w_0; так как $w_0 = 0$ – центр круга, то $w_0^* = \infty$. Тогда преобразование имеет вид $w(z) = \lambda(z - z_0)/(z - \overline{z}_0)$. Воспользуемся тем, что граница области при конформном преобразовании перейдет в границу области, т. е. при $z = x$, $|w(x)| = R$. Имеем $R = |\lambda| \cdot \left| \frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0} \right| = |\lambda|$, $\lambda = Re^{i\varphi}$, $w(z) = Re^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ – это есть общий вид дробно-линейного преобразования, где параметр φ – угол поворота круга, при этом круг переходит сам в себя.

13.62. Доказательство. Пусть существует конформное отображение, переводящее кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $R_1 < |w| < R$, и которое задается функцией $f(z)$, аналитической в кольце $r_1 < |z| < r_2$ и однолистной. Используя принцип симметрии Римана–Шварца, получим аналитическое продолжение функции $f(z)$ на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ за исключением, быть может, точки $z = 0$, при этом $f(z)$ задает конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ на себя. Возможны два случая.

Первый случай, когда точка $z = 0$ переходит в точку $w = f(0) = 0$, бесконечно удаленная точка переходит в себя. Имеем $f(z) = z\,g(z)$, где $g(z)$ – целая функция, $g(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{C}$. Так как окружность $|z| = r_1$ или $|z| = r_2$ переходит в окружность, то $g(z) = \text{const}$. В самом деле, достаточно рассмотреть функцию $\ln[g(z)]$, которая аналитична в круге $|z| \leq r_1$ и на границе $|z| = r_1$ действительная часть $\operatorname{Re}\ln[g(z)] = \ln|g(z)|$ есть константа. Отсюда следует, что гармоническая функция $\operatorname{Re}\ln[g(z)]$ есть константа во всем круге $|z| \leq r_1$, поэтому и $\ln[g(z)]$ есть константа. Окончательно, $f(z) = a\,z$ и $r_1/r_2 = R_1/R_2$.

Второй случай. Точка $z = 0$ переходит в бесконечно удаленную точку, а эта последняя – в точку $w = 0$. Если рассмотреть функцию $g(z) = 1/f(z)$, то придем к первому случаю, а тогда $f(z) = 1/az = bz^{-1}$. И в этом случае $r_1/r_2 = R_1/R_2$.

13.94.1. Так как исходная область симметрична относительно действительной оси и граница области должна перейти на действительную ось, то применим принцип симметрии Римана–Шварца. Рассмотрим область D_1, границей которой является действительная ось и отрезок на мнимой оси: $y \in [0, 1]$, $x = 0$. Применим к этой области последовательно преобразования: $w_1 = z^2$, $w_2 = w_1 + 1 = z^2 + 1$, $w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{z^2+1}$, при этом берем ту ветвь квадратного корня, которая переводит D_1 на верхнюю полуплоскость. Так как $w_3 = \sqrt{z^2+1}$ переводит область D_1 на верхнюю полуплоскость, то исходная область – внешность креста – перейдет на всю плоскость с выброшенным отрезком $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ по действительной оси. Теперь применим дробно-линейное преобразование $w_4 = \dfrac{\sqrt{2}-w_3}{\sqrt{2}+w_3} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{z^2+1}}$, переводящее исходную область (внешность креста) на всю комплексную плоскость с выброшенным положительным лучом. И последнее преобразование $w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{z^2+1}}}$ переводит исходную область на верхнюю полуплоскость (берется та ветвь многозначной функции, которая переводит на верхнюю полуплоскость).

Итак, $w(z) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{z^2+1}}}$.

Глава 14

14.8. б) Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Условие сопряжения гармонических функций $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ имеет вид $u'_r = \frac{1}{r}v'_\varphi, v'_r = -\frac{1}{r}u'_\varphi$. Так как $u(r,\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^4} = \frac{\cos 2\varphi}{r^2}$, то

$$u'_r = -\frac{2\cos 2\varphi}{r^3},\ u'_\varphi = -\frac{2\sin 2\varphi}{r^2},\ v'_\varphi = -\frac{2\cos 2\varphi}{r^2},\ v'_r = \frac{2\sin 2\varphi}{r^3}.$$

Отсюда $v(r,\varphi) = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} + f(r) = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} + g(\varphi)$, поэтому $f(r) = g(\varphi) \equiv$ c (const). Итак, $v(r,\varphi) = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} + c = -\frac{2r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^4} + c = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + c.$

Ответ: $v(r,\varphi) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + c.$

14.17. Пусть $u(x, y)$ – гармоническая функция в замкнутом круге радиуса R и с центром в точке (x_0, y_0), и точка (x, y) лежит внутри этого круга. Обозначим значение функции $u(x, y)$ на границе круга через $u(R, \varphi)$, а значение функции $u(x, y)$ вне границы – через $u(r, \theta)$. По данной гармонической функции $u(x, y)$ построим аналитическую функцию $f(z)$ в замкнутом круге – так, что $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $f(z_0+Re^{i\varphi}) = u(R, \varphi) + iv(R, \varphi)$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = R}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0},\ \ z_0 = x_0 + iy_0.$$

Переходя к параметризации $\xi - z_0 = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, получаем

$$d\xi = Rie^{i\varphi}d\varphi,\ f(z_0) = \frac{i}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi\ –$$

формула среднего значения для аналитической функции. Теперь отделим действительную и мнимую части в левой и правой частях этой формулы и получим

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,d\varphi,\ \text{где}\ u(R,\varphi) = u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi).$$

14.29. 2) Запишем решение $u(r, \theta)$ в виде интеграла Пуассона:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\cos\varphi d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)},\ \ 0 \le r < 1, \theta \in [0, 2\pi].$$

Сделаем замену $\varphi - \theta = \alpha - \pi/2$, тогда

$$u(r,\theta)=\frac{(1-r^2)}{2\pi}\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\cos(\theta+\alpha-\pi/2)\,d\alpha}{1+r^2-2r\cos(\alpha-\pi/2)}=$$

$$=\frac{(1-r^2)}{2\pi}\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\sin(\theta+\alpha)\,d\alpha}{1+r^2-2r\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(1-r^2)}{2\pi}\left[\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\sin\theta\cdot\cos\alpha\,d\alpha}{1+r^2-2r\sin\alpha}+\cos\theta\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{1+r^2-2r\sin\alpha}\right],$$

так как $\displaystyle\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{1+r^2-2r\sin\alpha}=0$, а $\displaystyle\int\limits_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{1+r^2-2r\sin\alpha}=\frac{r2\pi}{1-r^2}$

(см. 12.13. 10)). Окончательно получаем $u(r, \theta) = r\cos\theta$ или $u(x, y) = x$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Ответ: $u(x, y) \equiv x$.

14.48. Пусть $r < R_1 < R$, тогда функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $\{|z| \le R_1\}$ и ее можно разложить в ряд Тейлора по степеням z, ряд будет равномерно сходиться в круге $\{|z| \le R_1\}$:

$$f(z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|\le R_1.$$

Если $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $a_n = a_n' + ia_n''$, и $z = re^{i\theta}$, то

$$u(x,y)+i\,v(x,y)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(a_n'+ia_n'')r^n e^{in\theta},\ \ z=x+iy.$$

Имеем $$u(re^{i\theta})=u(x,y)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(a_n'r^n\cos n\theta-a_n''r^n\sin n\theta),$$

$$v(re^{i\theta})=v(x,y)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(a_n'r^n\sin n\theta+a_n''r^n\cos n\theta).$$

По теореме Тейлора запишем коэффициенты в виде

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}=a_n'+ia_n''=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(R_1e^{i\varphi})Rie^{i\varphi}d\varphi}{R^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}=$$

(замена $\xi=Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,2\pi]$) $=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(R_1e^{i\varphi})}{R_1^n}e^{-in\varphi}d\varphi$. Поэтому

$$a_n'=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(R_1e^{i\varphi})\cos n\varphi+v\sin n\varphi}{R_1^n}d\varphi,$$

$$a_n''=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(R_1e^{i\varphi})\sin n\varphi-v\cos n\varphi}{R_1^n}d\varphi,\ n=0,1,2,\ldots.$$

При $n = 0$ имеем $a_0'=\alpha_0=u(0)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(R_1e^{i\varphi})d\varphi,$

$$a_0'' = +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R_1 e^{i\varphi})\,d\varphi = +v(0).$$

Пусть $n \geq 1$. Коэффициенты a_n можно записать в виде

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi^{n+1}} + \frac{C}{2\pi i}\int_{|\xi|=R_1} f(\xi)\xi^m\,d\xi,\ m \geq 0, C = \text{const}.$$

Так как второй интеграл равен нулю, имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1 e^{i\varphi})\left[\frac{e^{-in\varphi}}{R_1^n} + C\,R_1^{m+1}e^{i(m+1)\varphi}\right]d\varphi.$$

Положим $C = \dfrac{\pm 1}{R_1^{n+m+1}}$, $m+1=n$. Итак,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R_1 e^{i\varphi})}{R_1^n}\left[e^{-in\varphi} \pm e^{im\varphi}\right]d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{R_1^n}\int_0^{2\pi}(u+iv)\left(e^{-in\varphi} \pm e^{in\varphi}\right)d\varphi.$$

В первом случае $a_n = a_n' + ia_n'' = \dfrac{1}{2\pi R_1^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}(u+iz)\,2\cos n\varphi\,d\varphi$.

Во втором случае $a_n = a_n' + ia_n'' = \dfrac{1}{2\pi R_1^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}(u+iz)(-2i\sin n\varphi)\,d\varphi.$

Поэтому

$$a_n' = \frac{1}{\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} u(R_1 e^{i\varphi})\cos n\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} v(R_1 e^{i\varphi})\sin n\varphi\,d\varphi,$$

$$a_n'' = \frac{1}{\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} v(R_1 e^{i\varphi})\cos n\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{\pi R_1^n}\int_0^{2\pi} u(R_1 e^{i\varphi})\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Глава 15

15.6. 3) Очевидно, что показатель степени роста функции t^ν равен нулю, поскольку на бесконечности t^ν растет не быстрее многочлена. Поэтому изображение Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty t^\nu e^{-pt}\,dt,\ p = p_1 + ip_2,$$

можно рассматривать для p: $\operatorname{Re} p > 0$. Для вычисления этого интеграла рассмотрим функцию $f(z) = z^\nu e^{-z}$ комплексного переменного z в области D_R, граница которой представляет объединение

$$\partial D_R = [0, R] \cup \{z: |z| = R, 0 \le \arg z \le \alpha, \operatorname{tg}\alpha = \frac{p_2}{p_1}, p_1 > 0\} \cup$$

$$\cup \{z: z = (p_1 + ip_2)t, t \in [0, R]\}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в указанной области, а в точке $z = 0$ имеет интегрируемую особенность ($\nu > -1$), поэтому по теореме Коши интеграл по границе $\oint\limits_{\partial D_R} f(z)dz = 0$. Но интеграл по границе представим в виде суммы трех интегралов:

$$\int_0^R t^\nu e^{-t} dt + \int\limits_{\substack{|z|=R \\ 0 \le \arg z \le \alpha}} z^\nu e^{-z} dz + \int_R^0 (pt)^\nu e^{-pt} d(pt) = I_1 + I_2 + I_3.$$

При $R \to +\infty$ интеграл I_2 стремится к нулю, поскольку для подынтегральной функции справедлива оценка $|z^\nu \cdot e^{-z}| \le |z|^\nu e^{-t} \le R^\nu e^{-R}$. Устремив $R \to +\infty$ в интегралах I_1 и I_3, из последнего равенства получим:

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-t} dt - p^{\nu+1} \int_0^\infty t^\nu e^{-pt} dt = 0.$$

Следовательно, $F(p) = \Gamma(\nu + 1)/p^{\nu+1}$, что и требовалось доказать.

Как частный случай этого примера рассмотрим функцию Хевисайда $H(t)$. Из этого примера следует, что изображение Лапласа функции Хевисайда равно $1/p$.

5) Рассмотрим функцию $\sin \omega t$ при некотором комплексном ω. Тогда

$$|\sin \omega t| = \left| \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right| \le \frac{\left|e^{i\omega t}\right| + \left|e^{-i\omega t}\right|}{2} = \frac{e^{-\operatorname{Im}\omega t} + e^{\operatorname{Im}\omega t}}{2} \le e^{|\operatorname{Im}\omega| t}.$$

Из этой оценки вытекает, что показатель степени роста функции $\sin \omega t$ равен $|\operatorname{Im} \omega|$. Поэтому изображение Лапласа $F(p)$ можно рассматривать для p: $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$. Используя пример 3), получим

$$F(p) = \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(p - i\omega)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(p + i\omega)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{\Gamma(1)}{p - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{\Gamma(1)}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

15.21. Функцией Бесселя $J_n(z)$ первого рода порядка $n \in \mathbf{Z}$ называется решение дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2\omega}{dz^2} + z\frac{d\omega}{dz} + (z^2 - n^2)\omega = 0,$$

которое представляется степенным рядом

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}.$$

Изображение Лапласа имеет вид:

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} J_0(t) e^{-pt/\alpha} dt.$$

Для доказательства 1) достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1$. Если предположить, что $\operatorname{Re} p \geq s_0 > 0$, то ряд, представляющий функцию Бесселя $J_0(t)$, можно почленно интегрировать. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} J_0(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{\Gamma(k+1)} \cdot \int_0^{\infty} t^{2k} e^{-pt} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{k!} \cdot \frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(2k)}{2^{2k}} \frac{1}{p^{2k}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2k}{k!\,2^{2k}} \frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}{2^k\, k!} \cdot \frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+\frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (k-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

15.27. 1) Легко вычислить, что $F_h(p) = \left(e^{-ph} - 1\right)/(-ph)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{h \to +0} F_h(p) = 1$. При этом мы придерживаемся следующих определения и обозначения. Распределение δ–функции Дирака может быть введено следующим образом:

$$< \delta, \varphi > \underset{Df}{=} \varphi(0) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t)\, dt\,,$$

где функция $\varphi(t)$ является бесконечно дифференцируемой и сколь угодно быстро стремится к нулю на бесконечности. Любая производная δ–функции может быть вычислена по правилу

$$< \delta^{(n)}, \varphi > \underset{Df}{=} (-1)^n < \delta, \varphi^{(n)} > = (-1)^n \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

2) Изображение Лапласа $F(p)$ δ–функции определим по формуле

$$F(p) = <\delta, e^{-pt}> = \lim_{h\to 0} <f_h, e^{-pt}> = \lim_{h\to +0} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-pt}\,dt = 1.$$

А изображение Лапласа $F_n(p)$ n-й производной функции $\delta^{(n)}$ определим следующим образом:

$$F_n(p) = <\delta^{(n)}, e^{-pt}> = (-1)^n <\delta, (e^{-pt})^{(n)}> = <\delta, p^n e^{-pt}> =$$

$$= \lim_{h\to +0} \frac{1}{h}\int_0^h p^n e^{-pt}\,dt = p^n \lim_{h\to +0} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-pt}\,dt = p^n,$$

что и требовалось доказать.

15.39. Для решения этой задачи предположим, что прямые и обратные преобразования Лапласа функций, входящих в уравнение, существуют.

1) Из результата решения задачи 15.13 можно утверждать, что

$$F(p) = \Phi(p)\cdot L(p),$$

где F, Φ и L – изображения Лапласа функций f, φ и K соответственно. Пусть $L(p) \neq 0$. Тогда по формуле Мелина

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\,\frac{F(p)}{L(p)}\,dp,$$

где $x > s_0$, а s_0 – показатель степени роста функции $\varphi(t)$.

2) Аналогично предыдущему случаю, решение $\varphi(t)$ уравнения второго рода может быть получено по формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\,\frac{F(p)}{1-L(p)}\,dp.$$

15.43. Для простоты изложения предположим, что $u(t, 0) = 0$ и напомним, что преобразование Лапласа δ–функции равно 1, а ее преобразование с запаздываающим аргументом равно e^{-pT}, где $T > 0$ – запаздывание. Далее, применим преобразование Лапласа по переменной t и, учитывая задачу 15.11, получим в изображениях Лапласа задачу

$$p^2 U(p,x) = a^2 U''_{xx}(p,x),\ U'_x(p,0) = Ve^{-pT},\ U(p,0) = 0,$$

где $U(p, x)$ – изображение Лапласа $u(t,x)$. Общее решение уравнения для $U(p, x)$ имеет вид

$$U(p,x) = A(p)\,\mathrm{ch}\,\frac{px}{a} + B(p)\,\mathrm{sh}\,\frac{px}{a}.$$

Учитывая граничные условия при $x = 0$, легко получить, что $A(p) \equiv 0$, а $B(p) = \frac{aV}{p} e^{-Tp}$. Таким образом, $U(p,x) = \frac{aV}{p} e^{-Tp} \operatorname{ch} \frac{px}{a}$. По формуле Мелина

$$u(t,x) = \frac{aV}{2\pi i} \int\limits_{p_1 - i\infty}^{p_1 + i\infty} \frac{e^{pt - pT}}{p} \cdot \operatorname{ch} \frac{px}{a} dp =$$

$$= \frac{aV}{2\pi i} \int\limits_{p_1 - i\infty}^{p_1 + i\infty} \frac{e^{p(t - T + a/x)} + e^{p(t - T - a/x)}}{2p} dp =$$

$$= \frac{aV}{2} \{ H(t - T + a/x) + H(t - T - a/x) \},$$

где H есть функция Хевисайда, и мы воспользовались результатами задачи 15.6 1).

Глава 16

16.7. Рассмотрим сначала случай, когда функция $f(x)$ монотонно не убывает при $x \ge 0$. В таком случае

$$\int_0^n f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1),$$

$$\int_0^n f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \ge \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Из этих двух неравенств вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - f(n) \le \int\limits_0^n f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(0).$$

Переписав это двойное неравенство в виде

$$f(0) \le \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int\limits_0^n f(x)dx \le f(n),$$

получим, что $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \int\limits_0^n f(x)dx \right| \le |f(n)| + |f(0)|$. Для монотонно невозрастающей функции доказательство аналогично.

16.13. Исходный интеграл можно переписать в виде:

$$\int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{t^2 + \varepsilon^2} = \int\limits_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^2 + \varepsilon^2} dt + f(0) \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2 + \varepsilon^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{f'(\xi(t)) \cdot t}{t^2 + \varepsilon^2} dt + f(0) \left[\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{t}{\varepsilon} \Big|_0^1 \right] = I_1 + I_2.$$

При получении интеграла I_1 мы воспользовались теоремой Лагранжа. Поскольку функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке [0,1], легко получить оценку для интеграла I_1:

$$|I_1| \le \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \int_0^1 \frac{tdt}{t^2+\varepsilon^2} = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \cdot \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2) - \ln\varepsilon\right) = O(|\ln\varepsilon|).$$

Кроме того, поскольку $\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} \frac{\pi}{2}$, имеем, что при $\varepsilon\to+0$ справедливо $I_2 \sim \frac{f(0)}{\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}$. Таким образом, окончательно имеем, что при $\varepsilon\to+0$

$$\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t^2+\varepsilon^2} = \frac{f(0)}{2}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon} + O(\ln\varepsilon).$$

16.17. Рассмотрим функцию $F(z)$ вида

$$F(z) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{z+t}dt = \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t/z}dt$$

для комплексного переменного z, Re z > 0, в окрестности точки z = ∞. Заменив z на $\xi = 1/z$, рассмотрим функцию $g(\xi)$ вида

$$g(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+\xi t}$$

в окрестности точки $\xi = 0$ при условии, что Re $\xi > 0$. Теперь рассмотрим функцию $\Phi(s)$ действительного переменного s на отрезке [0, 1] вида $\Phi(s) = g(s\xi)$. Функция $\Phi(s)$ имеет на отрезке [0, 1] производные любого порядка, поскольку

$$\Phi^{(k)}(s) = (-1)^k k!\xi^k \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^k}{(1+st\xi)^{k+1}}dt$$

и интеграл в правой части равенства сходится равномерно по $s \in [0, 1]$ и ξ, Re $\xi > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\Phi^{(k)}(0) = (-1)^k k!\xi^k \int_0^\infty e^{-t}t^k\,dt = (-1)^k k!\xi^k\Gamma(k+1) = (-1)^k\xi^k(k!)^2.$$

Разложим функцию $\Phi(s)$ по формуле Маклорена при $s = 1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \frac{\Phi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0<\theta<1.$$

Поскольку $\Phi(1) = g(\xi)$, а $\Phi^{(k)}(0) = (-1)^k (k!)^2 \xi^k$, то справедливо представление

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k k!\xi^k + \frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0<\theta<1.$$

Сделав обратную замену переменной $\xi = 1/z$, для функции $F(z)$ получим равенство $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}+(-1)^{n+1}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}t^{n+1}}{(z+\theta t)^{n+2}}dt$, где $\operatorname{Re} z > 0$.

Далее, поскольку при $z\to\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, $(-1)^{n+1}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}t^{n+1}dt}{(z+\theta t)^{n+2}}=o(1/z^{n+1})$.

В таком случае для функции $F(z)$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, получим равенство

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

Поскольку при $z\to\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, $o\left(\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{z^{n+2}}$, то получим асимптотическое при $z\to\infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, разложение

$$\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{t+z}dt\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}},$$

что и требовалось доказать.

16.34. Поскольку $\alpha > 0$, то исходный интеграл сходится по признаку Дирихле–Абеля. Поэтому, интегрируя дважды по частям, получим

$$\int_0^\infty(1+x)^{-\alpha}e^{i\lambda x}dx=\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}(1+x)^{-\alpha}\Bigg|_0^\infty+\frac{\alpha}{i\lambda}\int_0^\infty(1+x)^{-\alpha-1}e^{i\lambda x}dx=$$

$$=\frac{i}{\lambda}+\frac{\alpha}{i\lambda}\left[\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}(1+x)^{-\alpha-1}\Big|_0^\infty\right]+\frac{\alpha+1}{i\lambda}\int_0^\infty(1+x)^{-\alpha-2}e^{i\lambda x}dx=$$

$$=\frac{i}{\lambda}+\frac{\alpha}{\lambda^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\int_0^\infty(1+x)^{-\alpha-2}e^{i\lambda x}dx.$$

Применяя лемму Римана–Лебега (см. 16.33), получим, что последний интеграл стремится к нулю при $\lambda\to+\infty$. Поэтому

$$\int_0^\infty(1+x)^{-\alpha}e^{i\lambda x}dx=\frac{i}{\lambda}+\frac{\alpha}{\lambda^2}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

16.55. Воспользовавшись формулой Пуассона (см. 16.53) для функции $f(x)$ при $x > 0$, получим равенство

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2n\pi t}\cdot e^{-t^2x}dt=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(2n\pi)t}e^{-t^2x}dt\ ,$$

в котором последний интеграл в правой части есть преобразование Фурье (см. 6.66) функции $e^{-t^2 x}$, взятое в точке $\xi = 2n\pi$. Этот интеграл равен (см. 6.66 или 6.49) $\exp\left(-\dfrac{\pi^2 n^2}{x}\right)/\sqrt{2x}$. Таким образом, имеем при $x \to +0$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{x}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{x}\right)\right) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}(1+2e^{-\pi^2/x}).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Аппарат теории аналитических функций может быть использован для изучения потенциально-соленоидальных векторных полей, если их описывать с помощью комплексного потенциала. Рассмотрим комплексный потенциал в гидродинамике, электростатике и термодинамике.

Комплексный потенциал

Циркуляцией вектора поля $A(A_x, A_y)$ вдоль замкнутого контура C называется криволинейный интеграл

$$\Gamma_C = \int_C A_x(x, y)dx + A_y(x, y)dy$$

(направление обхода по контуру – положительное).

Векторное поле A называется *безвихревым* или *потенциальным* в области D если в этой области существует функция $u(x, y)$ такая, что $A(x, y) = \operatorname{grad} u(x, y)$.

Если векторное поле A непрерывно в области D, то циркуляция по любому замкнутому контуру, принадлежащему D, равна нулю тогда и только тогда, когда векторное поле A – потенциальное. Если при этом область D односвязна и частные производные $\partial A_x/\partial y$ и $\partial A_y/\partial x$ непрерывны в D, то условие потенциальности поля A эквивалентно условию

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}. \qquad (1)$$

Если условие (1) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_k, $k = 1, \ldots, N$, в которых условие (1) нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных, то циркуляция по замкнутому контуру C, обходящему какую-либо из этих точек или группу таких точек, может быть отличной от нуля. Если циркуляция по контуру C, ограничивающему область, внутри которой находится лишь одна из точек z_k, отличная от нуля, то точка z_k называется *вихревой точкой.* Γ_C называется *интенсивностью вихря* в точке z_k (имеется в виду однократный обход по контуру C).

Потоком вектора поля A через кривую C называется криволинейный интеграл

$$N_C = \int_C A_n ds,$$

где A_n – проекция вектора $A(x, y)$ на положительное направление нормали к кривой C в точке (x, y). Если контур C замкнут, то

$$N_C = \int_C A_x(x, y)dy - A_y(x, y)dx$$

(направление обхода по контуру – положительное).

Векторное поле A называется *соленоидальным* в области D, если существует функция $v(x, y)$ такая, что полный ее дифференциал $dv = A_x\,dy - A_y\,dx$. Функция $v(x, y)$ называется *функцией тока*.

Если векторное поле A является соленоидальным в области D, то поток вектора A через любой замкнутый контур $C \subset D$ равен нулю. Если векторное поле A имеет непрерывные частные производные $\partial A_x/\partial x$ и $\partial A_y/\partial y$ в односвязной области D, то необходимым и достаточным условием соленоидальности поля A является условие

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{\partial A_y}{\partial y}. \tag{2}$$

Если условие (2) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_k, в которых оно нарушается или теряет смысл, то поток вектора поля A через замкнутый контур, внутри которого содержится точка z_k, может быть отличным от нуля.

Точка z_k называется *источником*, если $N_C > 0$, и *стоком*, если $N_C < 0$, где C – замкнутый контур, ограничивающий область, внутри которой содержится лишь одна эта точка z_k. Число N_C называется *обильностью* источника ($N_C > 0$) или стока ($N_C < 0$).

Предположим, что непрерывное векторное поле $A(x, y)$ потенциально и соленоидально в области D, т. е. существуют функции $u(x, y)$ – потенциальная функция, и $v(x, y)$ – функция тока, определенные с точностью до постоянных слагаемых, такие, что

$$du = A_x dx + A_y dy,$$
$$dv = A_x dy - A_y dx.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y),\ \ z = x + iy,$$

называемую *комплексным потенциалом*. Комплексный потенциал является аналитической функцией в области D.

$$A = A_x(x, y) + iA_y(x, y) = \overline{f'(z)},\ \ |A| = |f'(z)|,\ \arg A = -\arg f'(z).$$

Линии $u(x, y) = \text{const}$ называются *эквипотенциальными линиями* или *линиями уровня*. Линии $v(x, y) = \text{const}$ называются *линиями тока*. Линии уровня и линии тока образуют ортогональную сеть. Линии уровня функции $u(x, y)$ ортогональны вектору поля A. Следовательно, вектор поля A направлен по касательным к линиям уровня $v(x, y) = \text{const}$, т. е. линии тока являются векторными линиями рассматриваемого векторного поля. Заметим, что

$$\Gamma_C + iN_C = \int_C f'(z)dz.$$

Если производная $f'(z)$ внутри контура C имеет конечное число особых точек z_k, то $\Gamma_C + iN_C = 2\pi i\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\limits_{z=z_k} f'(z)$.

Комплексный потенциал в гидродинамике

Если a – полюс функции $f'(z)$, то в точке a функция $f(z)$имеет разложение вида

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a} +$$

$$+ \frac{\Gamma + iN}{2\pi i}\ln(z-a) + C_0 + C_1(z-a) + \ldots .$$

Говорят, что член $\dfrac{\Gamma+iN}{2\pi i}\ln(z-a)$ определяет в точке a *вихреисточник* обильности N и интенсивности Γ, обозначаемый (a, N, Γ), член $\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}$ – *диполь* с моментом p, обозначаемый $(a;\ p)$ (p – комплексное число), радиус-вектор p определяет направление от диполя, проходящее через точку a в направлении линии тока.

Если на бесконечности

$$f(z) = C_n z^n + \ldots + \frac{p}{2\pi}z + \frac{\Gamma+iN}{2\pi i}\ln z + C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \ldots ,$$

то член $\dfrac{\Gamma+iN}{2\pi i}\ln z$ определяет на бесконечности вихреисточник обильности N и интенсивности Γ, член $\dfrac{p}{2\pi}z$ – диполь с моментом p.

1. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, комплексный потенциал которого равен az, $a > 0$.

Решение. $f'(z) = a$, поэтому вектор скорости параллелен действительной оси, направлен в положительную сторону и по длине равен a во всех точках плоскости.

2. Движение жидкости задается комплексным потенциалом $f(z) = z^2$. Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости $\boldsymbol{V}$, проекции вектора скорости V_{Ox} и V_{Oy} на оси координат Ox и Oy.

Решение. $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$, поэтому потенциал скоростей $u(x, y) = x^2 - y^2$, функция тока $v(x, y) = 2xy$. Линии уровня $u(x, y) = x^2 - y^2 =$ const – гиперболы, линии тока $v(x, y) = 2xy =$ const – гиперболы. Величина вектора скорости и его аргумент есть

$$|V| = |f'(z)| = |2z| = 2\sqrt{x^2+y^2}, \ \arg \mathbf{V} = -\arg f'(z) = -\operatorname{arctg}(y/x).$$

Проекция вектора скорости на координатные оси Ox, Oy: $V_{Ox} = 2x$, $V_{Oy} = -2y$. Начало координат является точкой покоя жидкости.

3. Движение жидкости задается комплексным потенциалом $f(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Найти величину потока, циркуляцию Γ_C через окружность $C = \{2|z| = 3\}$.

Ответ. $\Gamma_C = 0$, $N_C = 6\pi^2$.

4. Найти комплексный потенциал $f(z)$ течения жидкости, если известны уравнения эквипотенциальных линий

$$\operatorname{ch} z \sin y + 2xy = \text{const}, \ f(0) = 0.$$

Ответ. $f(z) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z)$.

5. Течение жидкости определяется комплексным потенциалом. Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси координат:

а) $f(z) = z^2 + 2z + 2$; б) $f(z) = z^{-2}$; в) $f(z) = \ln(z-1)$.

Ответы. а) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 2$, $v(x, y) = 2(x+1)y$, линии уровня $x^2 - y^2 + 2x = C_1$ – гиперболы, линии тока $xy + y = C_2$ – гиперболы; $|V| = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $\operatorname{Arg} \boldsymbol{V} = -\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x+1} + m\pi$, $m = -1, 0, 1$; $V_{Ox} = 2(x+1)$, $V_{Oy} = -2y$;

б) $u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $v(x, y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, линии уровня $x^2 - y^2 = C_1(x^2+y^2)^2$, линия тока $xy = C_2(x^2+y^2)^2$, $|V| = \dfrac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\operatorname{Arg} \boldsymbol{V} = 3\operatorname{arctg}(y/x) + (3m-1)\pi$, $m = -1, 0, 1$,

$$V_{Ox} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \ V_{Oy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

в) $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2]$, $v(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}$, линии уровня

$(x-1)^2 + y^2 = C_1$ – окружности, линии тока $y = C_2(x-1)$ – прямые,

$|V| = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$, $\operatorname{Arg} \boldsymbol{V} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} + m\pi$, $m = -1, 0, 1$;

$$V_{Ox} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, V_{Oy} = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

6. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известны уравнения линий уровня

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = \text{const}, f(0) = 0.$$

Ответ. $f(z) = (1 - i)z^2 + z$.

7. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известны уравнения линий тока: $\cos x \operatorname{sh} y = \text{const}, f(0) = 0$.

Ответ. $f(z) = \sin z$.

8). Найти циркуляцию по окружностям $|z \pm a| = a$, если известен комплексный потенциал течения жидкости

$$f(z) = 5i \ln (z^2 - a^2).$$

Ответ. $\Gamma_C = -10\pi$ по обеим окружностям.

9. По заданному комплексному потенциалу определить обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей, и исследовать поведение течения на бесконечности:

а) $f(z) = Cz$ $(C = \alpha + i\beta)$; б) $f(z) = z^n$; в) $f(z) = z^{-1}$;

г) $f(z) = \ln(z^2 - a^2)$, $a > 0$; д) $f(z) = z + R^2z^{-1}$; е) $f(z) = z - R^2z^{-1}$.

Ответ.

а) $\Gamma = 0$, $N = 0$, на бесконечности диполь с моментом $p = 2\pi C$, $V = \alpha - i\beta$;

б) $\Gamma = 0$, $N = 0$, на бесконечности мультиполь порядка $2n$;

в) $\Gamma = 0$, $N = 0$, в точке $z = 0$ диполь с моментом $p = 2\pi$, $V = -r^{-1}e^{i2\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$; $V_\infty = 0$;

г) в точках $\pm a$ источники обильности 2π, на бесконечности источник обильности -2π, $V = \dfrac{2\bar{z}}{\bar{z}^2 - a^2}$;

д) в точке 0 диполь с моментом $-2\pi R^2$, на бесконечности -2π, $V = 1 - \dfrac{R^2}{r^2}e^{i2\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$, $V_\infty = 1$;

е) в точке 0 диполь с моментом $2\pi R^2$, на бесконечности диполь с моментом 2π, $V = 1 + \dfrac{R^2}{r^2}e^{i2\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$, $V_\infty = 1$.

10. Найти комплексный потенциал течения во всей плоскости, образованный вихреисточниками $\{(\alpha_k, N_k, \Gamma_k)\}$, $k = 1, \ldots, N$, имеющего на бесконечности заданную скорость $V_\infty = e^{i\alpha}$.

Ответ. $f(z) = Ve^{-i\alpha}z + \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma_k + iNr}{2\pi i}\ln(z - \alpha_k)$. На бесконечности – диполь с моментом $2\pi Ve^{-i\alpha}$ и вихреисточник с обильностью $N_\infty = \sum_{k=1}^{N} N_k$ и интенсивностью $\Gamma_\infty = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k$.

11. Найти закон изменения вихреисточника диполя, находящегося в точке a или на бесконечности при следующих однолистных конформных отображениях окрестности этих точек $C_1 \neq 0$, $C_{-1} \neq 0$:

а) $\xi(z) = \alpha + C_1(z - a) + \ldots$; б) $\xi(z) = \alpha + C_{-1}/z + \ldots$;

в) $\xi(z) = (C - 1)/(z - \alpha) + C_0 + \ldots$; г) $\xi(z) = C_1 z + C_0 + \ldots$.

Ответы. При однолистном конформном отображении вихреисточник переходит в вихреисточник той же обильности и интенсивности.

а) диполь $(a, p) \to (\alpha, pC_1)$; б) диполь $(\infty, p) \to (\alpha, pC_{-1})$;
в) диполь $(a, p) \to (\infty, p/C_{-1})$; г) диполь $(\infty, p) \to (\infty, p/C_1)$.

Комплексный потенциал в электростатике и теплопроводности

Плоское электростатическое поле, т. е. поле вектора напряженности $\boldsymbol{E} = \{E_x(x, y), E_y(x, y)\}$ является полем градиента $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\, v(x, y)$, $v(x, y)$ – потенциал электростатического поля, т. е. поле $\boldsymbol{E}$ потенциально. Во всех точках, в которых нет зарядов, электростатическое поле соленоидально. Для его изучения целесообразно воспользоваться понятием комплексного потенциала. *Комплексным потенциалом поля* $\boldsymbol{E}$ называют функцию

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где

$$dv = -[E_x dx + E_y dy],\ du = -E_y dx + E_x dy.$$

Функция $u(x, y)$ – силовая функция, $v(x, y)$ – потенциал электростатического поля,

$$|\boldsymbol{E}| = |f'(z)|, \quad \text{Arg}\, \boldsymbol{E} = -[\pi/2 + \text{Arg}\, f'(z)].$$

Линии уровня $v(x, y)$ называются *эквипотенциальными* линиями, линии уровня $u(x, y)$ – *силовыми* линиями, Γ_C равна работе поля при перемещении единичного заряда по замкнутому контуру, N_C (поток вектора напряженности) равен алгебраической сумме расположенных внутри контура C зарядов, умноженной на 2π.

1. Выяснить характер электростатического поля, соответствующего комплексному потенциалу $f(z) = i \ln z$.

Решение. $u = -\arg z$, $v = \ln |z|$. Эквипотенциальными линиями являются окружности $|z| = C_1$, силовыми линиями являются лучи $\arg z = C_2$;

$$|E| = |z|_{-1},\ \operatorname{Arg} E = -(\pi/2 + \operatorname{Arg}(i/2)) = \operatorname{Arg} z - \pi.$$

Вектор напряженности направлен вдоль силовой линии к началу координат. Особой точкой является точка $z = 0$, в ней расположен заряд. Выберем в качестве контура C окружность $|z| = r$. Тогда $E_n = -|z|^{-1} = -r^{-1}$, $N_C = -\int_C \frac{ds}{r} = -2\pi$. Величина заряда, расположенного в точке $z = 0$, равна -1. Отсюда следует, что комплексный потенциал, соответствующий заряду $+1$ в точке $z = 0$, имеет вид $f(z) = -i \ln z$.

2. Выяснить характер электростатического поля, соответствующего комплексному потенциалу $f(z) = i / z$.

Решение. $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Эквипотенциальными линиями являются окружности с центром на оси Ox, касающиеся оси Oy, силовыми линиями – окружности с центром на оси Oy, касающиеся оси Ox. $|E| = |z|^{-2}$, $\operatorname{Arg} E = 2\operatorname{Arg} z$, в особой точке $z = 0$ расположен диполь.

Комплексный потенциал в задачах электростатики находится так же, как и в задачах гидродинамики, т. е. как функция, отображающая заданную область на стандартную область, соответствующую типу рассматриваемой задачи (полуплоскость, полоса между параллельными прямыми, внешность круга, кольцо).

Если a – полюс $f'(z)$, и $f(z)$ имеет в окрестности точки a разложение

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{pi}{z-a} + 2qi \ln \frac{1}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots,$$

то член $2\,qi \ln \dfrac{1}{z-a}$ определяет в точке a плоский точечный заряд величиной $2q$, обозначаемый $(a, 2q)$, член $pi/(z-a)$ определяет в точке a диполь с моментом p, обозначаемый (a, p).

Если на бесконечности комплексный потенциал

$$f(z) = C_n z^n + \ldots + piz + 2qi \ln z + C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \ldots,$$

то член $2qi \ln z$ определяет на бесконечности плоский точечный заряд величиной $\rho = 2q$, член piz определяет диполь с моментом p.

3. Найти закон изменения точечного заряда $(a, 2q)$ и диполя (a, p) при однолистном конформном отображении.

Ответ. Величина точечного заряда сохраняется, если конформное отображение в окрестности точки a имеет вид

$$\xi(z) = \alpha + C_1(z-a) + \ldots\ C_1 \neq 0, \text{ то } (a, p) \to (\alpha, pC_1).$$

4. Показать, что комплексный потенциал электростатического поля, образованного точечным зарядом $(a, 2q)$ в произвольной односвязной области D, определяется формулой

$$f(z) = 2qi \ln \frac{1}{\omega(z,a)} + C,$$

где $\omega(z, a)$ – функция, конформно отображающая область D на единичный круг так, что $\omega(a, a) = 0$, C – действительная постоянная.

5. Найти комплексные потенциалы электростатических полей, образованных заданными точечными зарядами в указанных областях:

а) $\operatorname{Im} z > 0$, заряд $(z_0, 2q)$; б) $|z| < R$, заряд $(z_0, 2q)$;

в) $|z| > R$, заряд $(z_0, 2q)$; г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$, заряд $(\infty, 2q)$;

д) внешность отрезка $|x| < R$, $y = 0$, заряд $(\infty, 2q)$.

Ответы.

а) $f(z) = 2qi \ln \dfrac{z-\bar{z}_0}{z-z_0} + C$; б) $f(z) = 2qi \ln \dfrac{R^2 - \bar{z}_0 z}{R(z-z_0)} + C$;

в) $f(z) = 2qi \ln \dfrac{R^2 - \bar{z}_0 z}{R(z-z_0)} + C$;

г) $f(z) = 2qi \ln \dfrac{1}{\omega(z)} + C$, $\omega(z) = \dfrac{z - \sqrt{z^2 - C^2}}{a-b}$, $C^2 = a^2 - b^2$;

д) $f(z) = 2qi \ln \dfrac{1}{\omega(z)} + C$, $\omega(z) = \dfrac{z - \sqrt{z^2 - R^2}}{R}$.

6. Доказать, что электростатическое поле, образованное диполем (a, p) в произвольной односвязной области D, определяется комплексным потенциалом $f(z)$, где функция $f(z)$ отображает область D на внешность горизонтального отрезка так, что $f(a) = \infty$ и главная часть $f(z)$ в точке $z = a$ равна $pi/(z-a)$, если $a \neq \infty$, и равна piz, если $a = \infty$.

7. Построить электростатические поля, образованные заданными диполями:

а) $|z| < R$, диполь (a, p); б) $|z| > R$, диполь (a, p);

в) внешность отрезка $|x| < R$, $y = 0$, диполь (∞, p);

г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$, диполь (∞, p).

Ответы.

а) $f(z) = \dfrac{pi}{z-a} + \dfrac{p^* i}{z-a^*} + C, a \neq 0, a^* = \dfrac{R^2}{\overline{a}}, p^* = \dfrac{R^2\overline{p}}{\overline{a}^2}$,

$$f(z) = \frac{pi}{z} - \frac{\overline{p}i}{R^2}z + C, a = 0, C -$$ действительное число;

б) $f(z) = \dfrac{pi}{z-a} + \dfrac{p^* i}{z-a^*} + C, a \neq \infty, \ f(z) = \dfrac{pi}{z} - \dfrac{\overline{p}i}{R^2}z + C, a = \infty,$;

в) $f(z) = \rho(z\cos\alpha + i\sin\alpha\sqrt{z^2 - R^2}) + C, pi = \rho e^{i\alpha}$;

г) $f(z) = \dfrac{\rho}{a-b}[(az - b\sqrt{z^2 - C^2})\cos\alpha - i(bz - a\sqrt{z^2 - C^2})\sin\alpha] + C_1$,

$C^2 = a^2 - b^2$.

Плоская задача о стандартном распределении температуры внутри тела характеризуется аналитической функцией $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называемой *комплексным потенциалом теплового поля*, функция $u(x, y)$ – функция температуры в точке (x, y). Вектор

$$a = -k \operatorname{grad} u = = \overline{-kf'(z)}$$

называется *вектором потока тепла*, k – коэффициент теплопроводности.

Поток тепла через контур C равен $a = -k\int_C dv = ik\int_C f'(z)\,dz$. Если в окрестности точки a

$$f(z) = \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \frac{q}{2\pi k}\ln\frac{1}{z-a},$$

то член $\dfrac{q}{2\pi k}\ln\dfrac{1}{z-a}$ определяет в точке a источник (a, q) обильности q.

8. Найти распределение температуры в указанных областях по заданным источникам, считая, что на границе температура постоянна:

а) $\operatorname{Im} z > 0$, источник (a, q); б) $|z| < R$, источник (a, q);

в) полуполоса $|x| < a, y > 0$, источник (ih, q), $h > 0$.

Ответы.

а) $u(x, y) = \dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{z-\overline{a}}{z-a}\right| + C$; б) $u(x, y) = \dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)}\right| + C$;

в) $u(x, y) = \dfrac{q}{2\pi}\ln\left|\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{2a} + i\operatorname{sh}\dfrac{\pi h}{2a}}{\sin\dfrac{\pi z}{2a} - i\operatorname{sh}\dfrac{\pi h}{2a}}\right| + C.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций. М.: Наука, 1984.
3. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.
4. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
5. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М.: ИЛ, 1962.
6. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
8. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.
9. Кусис П. Введение в теорию пространств *Hp*. М.: Мир, 1984.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
12. Леонтьев А. Ф. Целые функции, ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
13. Леонтьева Т. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Научный мир, 2004.
14. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного. Изд-во МГУ, 1992.
15. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967.
16. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
17. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
18. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
19. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М. А. Евграфова. М.: Наука, 1974.
20. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.
21. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1962.
22. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
23. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, 1976.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Татьяна Алексеевна ЛЕОНТЬЕВА,
Валерий Семенович ПАНФЕРОВ,
Валерий Сергеевич СЕРОВ

**ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
С РЕШЕНИЯМИ**

Зав. редакцией академик *В. И. Арнольд*
Зам. зав. редакцией *А. С. Попов*
Ведущий редактор *Н. П. Трифонов*
Художник *М. М. Иванов*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *Н. Н. Трифоновым*

Подписано к печати 07.02.2005 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Печать офсетная. Объем 11,25 бум.л. Печ. л. 22.50. Изд. № 1/9937.
Тираж 1500 экз. Зак. 12099

Издательство «Мир»
Министерства культуры и массовых коммуникаций РФ.
107996, ГСП-6, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Диапозитивы подготовлены в издательстве «Мир»

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «ИПК «Южный Урал»
460000, г. Оренбург, пер. Свободина 4.